

Казахский национальный университет им.аль-Фараби

УДК 517.577

На правах рукописи

ДОСМАҒҰЛОВА ҚАРЛЫҒАШ АЛМАТҚЫЗЫ

**Корректно разрешимые задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на
римановой сфере с разрезами**

диссертация на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности

8D05401 – Математика

Отечественный научный консультант:
д.ф.-м.н, профессор
Кангужин Б.Е.

Зарубежный научный консультант:
профессор Ружанский М.В.

Республика Казахстан
Алматы, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА ПРОКОЛОТОЙ ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ.....	21
1.1 Основные понятия об операторе Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере .	24
1.2 Функция Грина оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере.....	25
1.3 Корректное определение максимального оператора.....	30
1.4 Обратимые сужения максимального оператора	35
1.5 О функции Грина возмущённого оператора Лапласа-Бельтрами с конечным числом проколотых точек на двумерной сфере.....	39
1.6 Дельта-образные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами.....	43
2 ОДНОЗНАЧНО РАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА СФЕРЕ, ПРОКОЛОТОЙ С ПОМОЩЬЮ КРИВОЙ.....	46
2.1 Известные факты.....	47
2.2 Корректная постановка краевой задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на сфере с разрезом.....	50
3 КОРРЕКТНО РАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ С РАЗРЕЗОМ	56
3.1 Основные понятия.....	56
3.2 Оператор Лапласа-Бельтрами на трехмерной сфере.....	59
3.3 О фундаментальных решениях оператора Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере	65
3.4 Оператор Лапласа-Бельтрами на сфере с разрезом	69
4 СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ	79
4.1 Оператор Лапласа-Бельтрами с дельта-образными возмущениями.....	81
4.2 Спектр оператора Лапласа-Бельтрами с дельта-образными возмущениями.....	83
4.3 Основные понятия о гармоническом осцилляторе.....	84
4.4 Спектральный анализ гармонического осциллятора на проколотой плоскости	86
4.5 Дельта-образные возмущения гармонического осциллятора.....	88
4.6 Спектр возмущённого гармонического осциллятора.....	90
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	93
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	96

ВВЕДЕНИЕ

Оператор Лапласа-Бельтрами играет фундаментальную роль в дифференциальной геометрии и уравнениях в частных производных, выступая ключевым математическим инструментом для понимания поведения функций, заданных на искривлённых поверхностях. В данной диссертации мы исследуем применение оператора Лапласа-Бельтрами к разрезанной римановой сфере – геометрической конфигурации, которая вносит нетривиальные топологические особенности и проблемы. Риманова сфера широко изучалась благодаря её математической значимости в различных областях, включая физику, компьютерную графику и геометрическое моделирование. Однако введение разрезов в сферу усложняет геометрию и топологию, создавая новые математические проблемы. Особое внимание уделяется влиянию введённых разрезов на римановую сферу, исследуя, как эти разрезы влияют на поведение оператора и связанные с ним спектральные свойства.

Актуальность темы исследования. В 1937 году С.Л. Соболев [1] рассмотрел однородное полигармоническое уравнение в области Ω из $\mathbb{R}^n$, граница которой состоит из гладких поверхностей разных коразмерностей. Он нашёл классы разрешимости некоторых краевых задач, когда граничные условия накладываются на гладкие компоненты границы области. Для формулировки условий разрешимости потребовалась теория дробных производных на гладких многообразиях разных размерностей [2]. Общая теория краевых задач для эллиптических уравнений на многообразиях, границы которых состоят из подмногообразий разных размерностей, была построена Б.Ю. Стерниным [3], которым были выявлены новые эффекты, которые не были представлены при постановке краевых задач Фредгольма для эллиптических уравнений в областях, граница которых представляет собой гладкую гиперповерхность. Оказалось, что фредгольмовость краевых задач для эллиптических уравнений в областях с границами разных размерностей зависит от гладкости решения. В частности, порядок гладкости решения влияет на количество граничных условий, которые необходимо задать на подмногообразии, представляющем граничную компоненту. Тем не менее, результаты Б.Ю. Стернина накладывают определённые ограничения на подмногообразия, представляющие компоненты границы области, где изучается основная задача. Указанные Б.Ю. Стерниным ограничения не могут быть удовлетворены, в частности, точечными подмножествами. Таким образом, постановка задачи краевых задач Фредгольма для эллиптических уравнений в областях с проколами в некоторых неподвижных точках является актуальной.

Точнее актуальный является исследование корректных постановок корректных задач для оператора Лапласа в областях размерности N , которые кроме основной границы размерности $(N - 1)$ имеют отдельные части границы в виде фиксированных точек. Конечное число этих точек и фиксированные точки

расположены вне основной границы размерности $(N - 1)$. В работах [4,5,6] предложен следующий подход к постановке корректных краевых задач для оператора Лапласа и его различных обобщений. В начале рассматривается область Ω с гладкой границей размерности $(N - 1)$. Затем выбирается корректно разрешимая краевая задача для исследуемого оператора, для которого удаётся выписать функцию Грина. Далее из области Ω удаляется конечное число внутренних точек, которые обозначаются через $\Omega_0 = \Omega \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$. Сужение на область Ω_0 исходной краевой задачи, первоначально заданной на Ω , является всюду разрешимой задачей. Однако может быть нарушена однозначность решения. Ставится вопрос: сколько и какие нужно потребовать дополнительные условия для однозначной разрешимости суженной задачи?

Рассмотрим задачу Соболева, которая имеет приложение в физике. С другой стороны задачу С.Л. Соболева можно переписать в виде

$$\Delta^m u + \sum_{v \geq 1} q_v(x) P_v(u) = 0, \quad \Omega$$

Ω - ограниченная односвязная область в n -мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Здесь $P_v(u)$ – некоторые дифференциальные операторы порядка меньше m . Функции $q_v(x)$ представляют собой некоторые комбинации дельта-функции Дирака с носителями на $\partial^v \Omega$:

$$\text{supp } q_v(x) = \partial^v \Omega.$$

В физике вышеуказанные потенциалы $q_v(x)$ принято называть потенциалами нулевого радиуса, так как их носители имеют n -мерную меру ноль. Поэтому по известной теореме функция $q_v(x)$ представляется в виде комбинации дельта-функции Дирака и ее производных с носителями на границе подмногообразия $\partial^v \Omega$. Тогда $q_v(x)$ представляет дифференциальный оператор с коэффициентами в виде распределения.

С разных точек зрения дифференциальные операторы с сингулярными коэффициентами изучались в [7-11].

Такая задача при $n=1$ для задачи Соболева рассмотрена в отдельных результатах работы [7], для задачи дифференциального оператора с коэффициентами в виде дельта-функции Дирака $q_v(x) = \sum_k c_k \delta_k$ в многомерном случае можно найти в работах [8].

В работе [9] указано применение подобных операторов в атомной физике. С точки зрения неархимедового анализа подобные операторы исследовались в работах [10]. Также дифференциальные операторы данного типа появляются при

усреднении периодических дифференциальных операторов. Подобные исследования можно найти в работах [11].

Данная диссертация продолжает исследования, начатые в [4]. Как правило, в модельных областях (например, шаре) для оператора Лапласа или полигармонического оператора функция Грина известна для некоторых краевых задач. Используя явный вид функции Грина в [4], описываются корректно разрешимые краевые задачи для неоднородного полигармонического уравнения в областях, из которых удалено конечное число фиксированных внутренних точек. В этом случае, используются пространства с «выходом» из пространства $L_2(\Omega)$ с конечномерным расширением. Конечная размерность зависит как от размерности исходной области, так и от числа удалённых точек.

В статье [4] представлено подробное описание корректно разрешимых краевых задач для оператора Лапласа внутри круговой области и внутри круговой области с отверстием. Также приведены формулы для нахождения резольвент, корректно поставленных задач для оператора Лапласа внутри круга с отверстием.

В этой работе описывается моделирование одномерных кристаллов и возникающих операторов вида

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda \delta_i.$$

Поскольку дельта-функции Дирака (обозначаемые δ_i) имеют значения, сосредоточенные в точках, это означает, что рассматриваются точечные взаимодействия.

Вначале представлены возмущения задачи Дирихле для неоднородного уравнения Лапласа. Далее используется следующее известное утверждение, описанное в источнике [12].

Теорема [12]. Решение задачи Дирихле для неоднородного гармонического уравнения в круге $\Delta^2 W(x, y) = f(x, y), x^2 + y^2 < r^2$, с граничным условием

$$W|_{x^2+y^2=r^2} = 0$$

задаётся формулой

$$W(x, y) = \iint_{\xi^2+\eta^2 < r^2} G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где

$$G(x, y, \xi, \eta) = d \ln ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)$$

$$-d \ln \left[\frac{\xi^2 + \eta^2}{r^2} \left(\left(x - \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} r^2 \right)^2 + \left(y - \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} r^2 \right)^2 \right) \right],$$

d — константа, конкретная форма которой не имеет значения, r - радиус круга.

Теорема утверждает, что функция Грина, разрешающая задачу Дирихле для окружности, может быть записана точно. Заметим, что ударная функция $G(x, y, \xi, \eta)$ всегда имеет отрицательные значения для любых значений (x, y) и (ξ, η) , поскольку она связана с отрицательно определенным оператором, соответствующим задаче Дирихле для гармонического уравнения.

Предположим, что имеется произвольная функция $h(x, y)$, которая дважды дифференцируема внутри области Ω , при условии, что оператор Лапласа $\Delta h(x, y)$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$. Вводим новую функцию $I(x, y)$ следующим образом

$$I(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \Delta_{\xi, \eta} h(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где $\Delta_{\xi, \eta}$ — оператор Лапласа относительно переменных ξ, η .

Ясно, что функция $I(x, y)$ имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} \Delta_{x, y} I(x, y) &= \Delta_{x, y} h(x, y), (x, y) \in \Omega, \\ I(x, y)|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

При этом необходимые для последующего анализа результаты сформулированы в виде отдельного утверждения, описывающего свойства функции Грина задачи Дирихле для неоднородного гармонического уравнения в круге. Наиболее важными из них являются симметрия относительно переменных и уравнение $\Delta_{x, y} G(Q, P) = \delta_{\Omega}(P, Q)$ для любого $Q, P \in \Omega$.

Во-первых, вводится следующая функция

$$W(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + h(x, y) - I(x, y),$$

где $h(x, y)$ — произвольная достаточно гладкая функция. В данной работе функция $W(x, y)$ является решением следующей задачи

$$\Delta W(x, y) = f(x, y), (x, y) \in \Omega, \quad W(x, y)|_{\partial\Omega} = h(x, y)|_{\partial\Omega}, \quad (0.1)$$

где $h(x, y)$ — произвольная достаточно гладкая функция.

В этом случае решение задачи (0.1) единственно, т.е. решение задачи зависит только от граничных значений $h(x, y)|_{\partial\Omega}$, но не зависит от $h(x, y)$, когда $(x, y) \in \Omega$.

Во-вторых, конструктивно построены их резольвенты, которые задаются в виде

$$(L_K - \lambda I)^{-1} f(x, y) = (L_0 - \lambda I)^{-1} f(x, y) + \int_{\partial\Omega} \left[L_K (L_K - \lambda I)^{-1} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial n_{\bar{\xi}, \eta}} \right] K L_0 (L_0 - \lambda I)^{-1} f(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta},$$

где L – непрерывный оператор, L_0 – соответствует задаче Дирихле из теоремы [12], через L_K обозначен оператор, соответствующий следующей задаче:

$$\begin{cases} \Delta^2 W(x, y) = f(x, y), & x, y \in \Omega, \\ W(x, y)|_{\partial\Omega} - L(\Delta^2 W)|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial n_{\bar{x}, y}} W(x, y)|_{\partial\Omega} - \frac{\partial}{\partial n_{\bar{x}, y}} L(\Delta^2 W)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

В [5] рассматривается множество корректно поставленных задач, связанных с полигармоническим оператором в области с отверстием. В этой работе также представлена формула для резольвенты корректно разрешимых задач, содержащих конечномерное возмущение полигармонического оператора.

Спектральный анализ обыкновенных дифференциальных операторов достаточно развит, поскольку их резольвенты являются конечномерными модификациями операторов Вольтерра. Цель данной работы — выделить класс многомерных дифференциальных операторов высшего порядка, возникающих из полигармонического уравнения, резольвенты которых являются конечномерными модификациями резольвент хорошо изученных модельных операторов.

Предположим, имеется ограниченная односвязная область Ω в n -мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Рассмотрим полигармоническое уравнение порядка m :

$$\Delta^m u(x) = f(x)$$

в области без одной точки $\Omega_0 = \Omega \setminus \{x^0\}$, при условиях на внешней границе $\partial\Omega$:

$$\Delta^k u|_{\partial\Omega} = 0, k = 0, \dots, m-1,$$

где x^0 является фиксированной внутренней точкой в Ω , и $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа. Предположим, что функция f принадлежит пространству $L_2(\Omega_0)$ и ищем решение u в пространстве $W_{2,loc}^{2m}(\Omega_0)$, где $W_{2,loc}^{2m}$ — это

пространство функций, имеющих слабые производные до порядка $2m$, локально принадлежащие L_2 . Важно отметить, что решение u из $W_{2,loc}^{2m}(\Omega_0)$ существует, но не обязательно является единственным. Поэтому данная работа нацелена в нахождении способа, ограничивающего пространство $W_{2,loc}^{2m}(\Omega_0)$ и введении дополнительных условия на x^0 , которые обеспечат единственность решения задачи.

Важно отметить, что рассматриваемые в этом контексте задачи можно считать предельными случаями для задач, возникающих в двусвязной области

$$\Delta^m u(x) = f(x), x \in \Omega_\delta,$$

где $\Omega_\delta = \Omega \cap \{x: |x - x_0| > \delta\}$. В этом случае на внешней границе выполняются следующие условия Ω :

$$\Delta^k u|_{\partial\Omega} = 0, k = 0, \dots, m-1,$$

и на внутренней границе применяются некоторые классические граничные условия. Оказывается, что при стремлении δ к нулю, в определённом смысле, предельную задачу можно описать семейством задач, изучаемых в данной работе.

Для значений $\delta > 0$, обозначим шар радиусом δ центрированным x^0 в $\Pi_\delta^0 = \{x \in \Omega: |x - x^0| \leq \delta\}$. Для $i = 0, 1, \dots, m-1$ и $s = 1, \dots, n$ вводим некоторые предельные функционалы

$$\begin{aligned} \gamma_{ni+i+1+0}(h) &= -\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \Delta_\xi^{m-i-1} h(\xi) dS_\xi, \\ \gamma_{ni+i+1+s}(h) &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial\Pi_\delta^0} \frac{\xi_s - x_s^0}{|\xi - x^0|} \Delta_\xi^{m-i-1} h(\xi) dS_\xi \end{aligned}$$

для функций $h \in W_{2,loc}^{2m}(\Omega_0)$.

Ранее было доказано [6], что некоторые классы уравнений соболевского типа (полигармоническое уравнение является одним из таких классов) в $\mathbb{R}^n$ могут быть однозначно решены, если рассматривать их в весовых пространствах Соболева, что в определённом смысле эквивалентно наложению условий на бесконечности (конечного количества). Однако в данной работе мы накладываем лишь конечное число дополнительных условий в ограниченной области.

Оператор $\mathcal{L}_0$ соответствует задаче с дифференциальным уравнением

$$\Delta^m u(x) = f(x), x \in \Omega$$

и граничными условиями

$$\Delta^k u|_{\partial\Omega} = 0, k = 0, \dots, m-1.$$

Согласно следующему соотношению, резольвента оператора $\mathcal{L}_K$ определяется в следующем виде

$$(L_K - \lambda I)^{-1} f(x) = (L_0 - \lambda I)^{-1} f(x) + \sum_{i=1}^{m(n+1)} [c_i (L_0 (L_0 - \lambda I)^{-1} f) L_K (L_K - \lambda I)^{-1} \tilde{G}_i(x)],$$

где c_i – коэффициенты, зависящие от параметра λ и от правой части f ; $\tilde{G}_i$ – функции, определяющие структуру конечномерного возмущения K .

В [6] из ограниченной открытой односвязной области с гладкой границей в n -мерном пространстве удаляется конечное число внутренних точек. В полученной области рассматриваются краевые задачи, корректно разрешимые для эллиптического оператора второго порядка с переменными коэффициентами. Область определения таких задач может содержать функции, в том числе имеющие свойства, близкие к фундаментальным решениям и их частным производным.

Рассматривается случай, когда размерность пространства d больше или равно 3. В случае d -мерной односвязной ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$, имеем равномерно эллиптический оператор $L(x, D)u$, который определяется следующим образом

$$L(x, D)u \equiv \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=1}^d b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u,$$

где коэффициенты a_{jk} принадлежат к $C^2(\Omega^-)$, b_k принадлежат к $C^1(\Omega^-)$, c принадлежит $C(\Omega^-)$, и $\Omega^- = \Omega \cup \partial\Omega$.

Приведем широко известный оператор $L_2(\Omega)$:

$$L(x, D)u = f(x), x \in \Omega, u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Оператор, соответствующий выше заданной задаче, обозначается через соответствующий оператор этой задачи как B_0 . Предполагается, что x^0 – внутренняя точка области Ω , а редуцированная область Ω_0 обозначается $\Omega \setminus \{x^0\}$. Область определения оператора также расширяется на B_0 , учитывая, что уравнение находится не в области Ω , а в приведённой области Ω_0 .

Предложенную схему построения обратимых ограничений можно в некотором смысле считать дуальной схеме Неймана в теории расширений. Стоит отметить, что теория расширений Неймана обычно ограничивается областью абстрактных операторов в гильбертовом пространстве. Однако наша схема построения обратимых ограничений остаётся применимой и за пределами гильбертова пространства.

Наша задача — переопределить операцию Δ для дополнительных элементов, добавляемых в $D(B_0)$.

Ниже рассматриваются конструкции, дающие удовлетворительные ответы на эти вопросы. Для удобства предполагается, что оператор B_0 ограниченно обратим в функциональном пространстве $L_2(\Omega)$. Коэффициенты дифференциального выражения $L(x, D)$ выбраны таким образом, что

$$D(B_0) = \{u \in W_2^2(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Лемма [6]. Система функций $\{\varphi_0, \dots, \varphi_d\}$ и система функционалов $\{\gamma_0, \dots, \gamma_d\}$ взаимно биортогональны, т.е. выполняются соотношения

$$\gamma_j(\varphi_i) = -\delta_{ij}, i, j = 0, 1, \dots, d.$$

Для каждой пары $f \in L_2(\Omega)$ введена новая функция $h \in W_{2,\gamma}^2(\Omega_0)$:

$$\omega(x) = \int_{\Omega} G(x, t) f(t) dt + h(x) - I(x).$$

Функция $\omega(x)$, определяемая данной формулой, является решением следующей задачи

$$B_{\max} \omega(x) = f(x), x \in \Omega_0 \quad \omega|_{\partial\Omega} = 0 \quad \gamma_i(\omega) = \gamma_i(h), i = 0, 1, \dots, d$$

для любого $f \in L_2(\Omega)$ и $h \in W_{2,\gamma}^2(\Omega_0)$. Более того, задача имеет единственное решение в классе $W_{2,\gamma}^2(\Omega_0)$.

Резольвента оператора B_α определяется как

$$\begin{aligned} & (B_\alpha - \lambda I)^{-1} f(x) \\ &= (B_0 - \lambda I)^{-1} f(x) + \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{i=0}^d \alpha_i (B_0 (B_0 - \lambda I)^{-1} f) H_i(x, \lambda), \end{aligned}$$

где

$$\Delta(\lambda) = \det \det [\delta_{ij} + \lambda \alpha_i (B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \varphi_j)] .$$

$H_i(x, \lambda)$ — определитель, который получится из $\Delta(\lambda)$, если его i -й столбец заменить следующим столбцом

$$\| B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \varphi_0(x), B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \varphi_1(x), \dots, B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \varphi_d(x) \|^\top .$$

Результаты данной работы остаются справедливыми и для многозначных областей $\Omega_0 = \Omega \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$, $s < \infty$. Кроме того, вместо внешнего граничного условия можно рассматривать другие граничные условия, и результаты по-прежнему будут применимы.

В [13] получено точное определение оператора Лапласа с дельтаобразными потенциалами. Проведено подробное исследование корректно разрешимых точечных возмущений и приведены явные формулы для их резольвент. Рассматривается анализ различных свойств этих резольвент, особое внимание уделено доказанной для них формуле Крейна.

Основная цель данной работы — дать строгое определение оператора, формально представленного как $-\Delta + \delta_s$, где Δ представляет оператор Лапласа, а δ_s -дельта-функцию Дирака. Эта классическая задача математической физики была предметом многочисленных исследований, и для её решения были предложены различные подходы. Один из известных методов, основанный на теории расширения симметричных операторов Неймана, называется «расширением на более широкое пространство». Обычно применение теории расширения Неймана ограничивается областью абстрактных операторов в гильбертовом пространстве.

Однако в данной работе предлагается новый метод ограничения уже чётко определённого максимального оператора. Этот метод, включающий ограничение максимального оператора, служит дуальным аналогом метода расширения, применяемого к минимальному оператору. В теории расширений минимального оператора основное внимание уделяется граничной форме, представленной формулой $\langle B_0^* u, v \rangle = -\langle u, B_0^* v \rangle$, где B_0 — минимальный симметричный оператор, u, v — функции (векторы), принадлежащие области определения сопряжённого оператора B_0^* .

Заметим, что исследование сосредоточено вокруг максимального оператора B_M , который можно считать сопряжённым к минимальному оператору B_0 . После того, как замкнутый максимальный оператор B_M точно определяется, строятся ограничения, которые можно решить всюду. Эти ограничения устанавливаются в контексте граничной формы $\langle B_M u, v \rangle = \langle u, B_M v \rangle$, где скобка $\langle, \rangle$ — означает внутреннее произведение (в скалярном смысле) элементов u и v в соответствующем гильбертовом пространстве. Следовательно, на

заключительном этапе самосопряжённые операторы определяются из этих ограничений, которые можно решить всюду.

Работа посвящена исследованию корректно разрешимых точечных возмущений и представлению явных формул для резольвент корректно разрешимых точечных возмущений. В качестве приложения выведен эквивалент формулы М.Г. Крейна для этих резольвент. Также в виде примера представлены дополнительные результаты при изменении исходного спектра оператора Лапласа. Более того, этот пример легко модифицируется так, чтобы лишь конечное число собственных значений оператора B_1 отличалось от собственных значений B_0 .

В работе [14] из многомерного шара извлекается гладкое многообразие меньшей размерности без границ. В рамках этой области устанавливаются корректно определённые обратимые связи для оператора Лапласа. В частности, определяется корректная задача для уравнения Лапласа, известная как негладкая задача Бицадзе-Самарского. Кроме того, выводится формула М.Г. Крейна для следа разности резольвент исследуемых операторов. Приводятся также доказательства и утверждения, касающиеся спектра негладкой задачи Бицадзе-Самарского.

Рассматриваются два заданных натуральных числа k и d , с k меньшими d . S_k представляется как k -мерное гладкое компактное многообразие без границ, погруженное в $\mathbb{R}^d$. Ω представляется как односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей, обозначенной как $\partial\Omega$. В данной работе основное внимание уделяется случаю, когда S_k полностью содержится в Ω , где $S_k \cap \partial\Omega = \emptyset$. Отправной точкой является начальная задача следующей краевой задачи Дирихле в Ω

$$-\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega \text{ и } u|_{\partial\Omega} = 0.$$

B_0 определяется как оператор, связанный с краевой задачей Дирихле в $L_2(\Omega)$ пространстве. В данном исследовании основное внимание уделяется изменениям оператора B_0 , в частности, вносимым дельтаобразными возмущениями, центрированными на многообразии S_k , не имеющем границ. Следует отметить, что при k равном 0, значение S_0 состоит из одного элемента. Случаи $k = d - 1$ и $d = 1$ были ранее рассмотрены в предыдущих исследованиях [6-14]. Однако сценарию с $0 < k < d$ было уделено сравнительно меньше внимания.

На начальном этапе исследования дается точное определение возмущения, а затем представляются спектральные характеристики корректно определённого возмущения. Наш подход основан на точном описании ограничений максимального оператора.

Чтобы упростить и избежать погружения в ненужные технические тонкости, считаем, Ω определено как

$$\Omega = \{x \in R^d: |x| < 1\},$$

$$S_k = \left\{x^0 \in R^d: (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 + \dots + (x_{k+1}^0)^2 = \frac{1}{4}, x_{k+2}^0 = \dots = x_d^0 = 0\right\}.$$

Рассматривается сценарий, где $0 \leq k < d - 1$. Когда δ больше нуля, используется обозначение $\Pi_\delta^0 = \{x \in \Omega: |x - x^0| < \delta, \forall x^0 \in S_k\}$ для представления δ – образного многообразия S_k . Такое δ выбрано достаточно малым, гарантируя, что Π_δ^0 полностью содержится внутри Ω . Выбрана фиксированная точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k+1}^0, 0, \dots, 0)$ на S_k . Разрез Π_δ^0 , проходящий через точку x^0 определяется как

$$K_\delta^{x^0} = \{x \in \Pi_\delta^0: x = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k+1}^0, x_{k+2}, \dots, x_d)\}.$$

Теперь вводится новая функция $w(x)$ следующим образом

$$w(x) = \int_{\Omega} G(x, t)f(t)dt + h(x) - I(x).$$

Здесь f является функцией, которая принадлежит $L_2(\Omega)$ и h находится внутри пространства $W_{2,\gamma}^2(\Omega_0)$.

Теорема [14]. Функция $w(x)$ является решением задачи

$$B_{max}w(x) = f(x), x \in \Omega_0, \quad w|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\gamma_i(w)|_{S_k} = \gamma_i(h)|_{S_k}, i = 0, k + 2, \dots, d,$$

для всех $f \in L_2(\Omega)$ и $h \in W_{2,\gamma}^2(\Omega_0)$.

Более того, задача имеет единственное решение.

На следующем этапе нашего исследования процесс определения обратимых ограничений для максимального оператора B_{max} будет продемонстрирован с использованием ранее упомянутой теоремы. Согласно этой теореме, определение области определения максимального оператора выглядит следующим образом:

$$D(B_{max}) := \{w: w(x) = \int_{\Omega} G(x, t)f(t)dt - \int_{S_k} \gamma_0(h)(x^0)G(x, x^0)dS_{x^0}^k\}$$

$$- \sum_{i=k+2}^d \int_{S_k} \gamma_0(h)(x^0) \frac{\partial G(x, x^0)}{\partial t_i} dS_{x^0}^k, \forall f \in L_2(\Omega), \forall h \in W_{2,\gamma}^2(\Omega_0)\}.$$

Рассмотрим h , который является элементом пространства $W_{2,\gamma}^2(\Omega_0)$, однозначно определяемым f в пределах пространства $L_2(\Omega)$. Следовательно, область определения максимального оператора B_{max} ограничена, и внутри этого множества существует обратимый оператор. Далее будут рассмотрены методы создания обратимых ограничений для максимального оператора. Оператор T будет определён следующим образом:

$$Tf(x) = \int_{S_k} t_0(f)(x^0) G(x, x^0) dS_{x^0}^k + \sum_{i=k+2}^d \int_{S_k} t_i(f)(x^0) \frac{\partial G(x, x^0)}{\partial t_i} dS_{x^0}^k$$

для любого f в пространстве $L_2(\Omega)$, определение $t_0, t_{k+2}, \dots, t_d$ выполняется таким образом, чтобы обеспечить Tf его расположение внутри пространства $W_{2,\gamma}^2(\Omega_0)$.

После этого, полагая $h(x) = Tf(x)$ для всех $f \in L_2(\Omega)$ в контексте задачи, описанной в теореме, получаем новую краевую задачу

$$B_{max}w(x) = f(x), x \in \Omega_0, \quad w|_{\partial\Omega} = 0 \quad \gamma_i(w) = t_i(B_{max}w), i = 0, k+2, \dots, d.$$

Также записаны резольвентные и спектральные свойства оператора Бицадзе - Самарского.

Приведено несколько примеров, описывающих краевые задачи для оператора Лапласа с разрезом замкнутой кривой.

Принимая во внимание вышеизложенные источники, мы ставим **основную цель** данной диссертационной работы, для формулировки и достижения которой мы поставим следующие задачи:

1. Рассмотреть оператор Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере, из которой удалена одна точка. Построить функцию Грина и записать корректно решаемую задачу. Исследовать спектр данного оператора;

2. Рассмотреть оператор Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере, из которой высечена дуга. Основываясь на полученных результатах, построить корректно решаемую задачу;

3. Рассмотреть оператор Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере из четырёхмерного пространства, из которого вырезан круг, не являющийся гиперплоскостью. Построить корректно решаемую задачу для этого случая.

Цели и задачи исследования. Основная цель работы — построение корректных задач для оператора Лапласа-Бельтрами на римановой сфере и

разработка спектральной теории некоторого дифференциального оператора на римановых многообразиях.

Для достижения цели исследования необходимо определить максимальный оператор, связанный с оператором Лапласа–Бельтрами на римановой сфере, и установить условия их корректности через анализ граничной формы.

Кроме того, требуется построить самосопряжённые расширения данного оператора и разработать спектральную теорию, описывающую его собственные значения и функции на римановых многообразиях.

Основные положения, выносимые на защиту диссертации:

1) Исследование корректности оператора Лапласа-Бельтрами на проколотой двумерной сфере и формулировка максимального оператора и его обратимых ограничений. Исследование функции Грина оператора Лапласа-Бельтрами с конечным числом проколотых точек. Исследование спектральных свойств оператора Лапласа-Бельтрами с дельтаобразными возмущениями;

2) Формулировка разрешимой задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере, проколотой разомкнутой кривой. Исследование однозначно разрешимой задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере, проколотой разомкнутой кривой;

3) Формулировка разрешимой задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере, проколотой замкнутой кривой. Исследование однозначно разрешимой задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере, проколотой замкнутой кривой;

4) Постановка спектральной задачи для оператора Лапласа-Бельтрами и возмущённого гармонического осциллятора. Исследование спектральных свойств операторов.

Объектами исследования являются дифференциальные операторы на римановых многообразиях.

Предметом исследования являются корректность и единственность разрешаемых задач и свойства их решений.

Методы исследования. Методы исследования корректно разрешимых задач для оператора Лапласа-Бельтрами на римановой сфере с разрезами обычно включают сочетание методов математического анализа, дифференциальной геометрии и численных методов.

В работе разработана математическая модель для представления римановой сферы с разрезами. Она включает в себя использование дифференциальной геометрии для описания поверхности, рассмотрение наличия разрезов как топологических характеристик и определение оператора Лапласа-Бельтрами в рамках этой модели.

Также сформулировано уравнение в частных производных с оператором Лапласа-Бельтрами на поверхности с разрезами. Оно может включать члены для оператора Лапласа-Бельтрами, граничные условия и любые дополнительные члены, относящиеся к исследуемой задаче.

Доказаны условия существования и единственности решений уравнения в частных производных. Этот шаг имеет решающее значение для установления «корректно разрешимых задач», который часто требует применения теорем функционального анализа и теории уравнений в частных производных.

Изучается топология римановой сферы с разрезами и анализируется поведение разрезом, их расположение и влияние на геометрию поверхности.

Новизна исследования. Исследование на тему «Корректно решаемые задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на римановой сфере с разрезами» представляет новый и инновационный подход к решению математических задач, связанных с оператором Лапласа-Бельтрами на римановой сфере с разрывами или разрезами.

В исследовании рассматривается оператор Лапласа-Бельтрами в контексте римановых сфер, имеющих разрывы или разрезы. Поэтому отходим от традиционного анализа, часто предполагающего гладкие, непрерывные многообразия. Включение разрезов значительно расширяет круг решаемых задач.

Термин «корректно решаемые задачи» означает строгий и чётко определённый подход к поиску решений. В исследовании предлагается систематическая основа для определения корректно решаемых задач с оператором Лапласа-Бельтрами на сфере с разрезами. Это включает в себя определение условий, при которых решения существуют и единственны.

В исследовании изучается взаимодействие геометрических и топологических аспектов римановых сфер с разрезами. Это взаимодействие имеет решающее значение для понимания поведения оператора Лапласа-Бельтрами в столь нестандартных ситуациях и позволяет глубже понять геометрию этих поверхностей.

Хотя исследования в основном сосредоточены на теоретических разработках, они имеют практическое применение в различных областях, таких как физика, инженерия и информатика. Понимание оператора Лапласа-Бельтрами на поверхностях с разрезами может быть актуально для решения задач, связанных с диффузией тепла, распространением волн и анализом данных на поверхностях неправильной формы.

В исследовании представлены новые математические инструменты и методы решения уравнений в частных производных на таких поверхностях. Эти инструменты могут найти более широкое применение в математике и открыть новые направления исследований.

Наличие разрезов создаёт вычислительные трудности при решении задач, связанных с оператором Лапласа-Бельтрами. Исследование может привести к рассмотрению или предложению новых методов решения этих проблем, что является важным вкладом для исследователей, занимающихся численным моделированием.

Подводя итог, отметим, что новизна данного исследования заключается в изучении операторных задач Лапласа–Бельтрами на римановых сферах с разрезами, в акценте на корректно решаемых задачах и в его потенциальном влиянии на математику и различные прикладные области. Предлагается новый взгляд на дифференциальные уравнения в нестандартных геометрических контекстах, что открывает возможности для дальнейших исследований и практических приложений.

Теоретическая и практическая значимость исследования.

Актуальность диссертационного исследования обусловлена тем, что его предмет, а именно оператор Лапласа-Бельтрами на римановом многообразии, имеет значительную актуальность не только в математической науке, но и в таких областях, как механика, физика, биология и другие естественные науки. Кроме того, существует значительный интерес к этим проблемам с математической точки зрения. Следовательно, полученные результаты актуальны и понятны исследователям во всем мире и могут служить ценной основой для будущих исследований.

Связь диссертационной работы с другими научными исследованиями.

Диссертация выполнена в рамках научного проекта грантового финансирования молодых учёных по проекту «Жас Ғалым» на 2024-2026 годы Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан «Корректная задача для дифференциальных операторов на римановом многообразии» (2024-2026 годы, AP22685565). Соответствует направлениям развития науки по приоритету: Интеллектуальный потенциал страны, по под приоритетам: Фундаментальные и прикладные исследования в области математики, механики, астрономии, физики, химии, биологии, информатики и географии.

Апробация работы. Результаты работы были представлены и обсуждены на следующих конференциях и семинарах:

- Научный семинар в Analysis PDE Center Гентского университета, Гент, Бельгия;
- Досмағұлова Қ. Корректно разрешимая задача для уравнения Лапласа-Бельтрами на трехмерной сфере с разрезом по окружности // Научный семинар «Дифференциальные операторы и их приложения» под руководством академика НАН РК М.Отелбаева, академика НАН РК Т.Ш.Калменова, члена-корреспондента НАН РК М.А.Садыбекова, профессора Б.Е.Кангужина, Алматы, Казахстан, 12 октября 2023 г.;
- Кангужин Б., Досмағұлова Қ. Корректно решаемая задача для уравнения Лапласа-Бельтрами на трехмерной сфере с разрезом по окружности // Труды Международной научной конференции Уфимская осенняя математическая школа – 2023, Уфа, 4 – 8 октября 2023 г.;
- Досмағұлова Қ.А. Дельтаобразные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере // Постерный доклад онлайн-конференции

«Тенденции в вариационном исчислении и уравнениях в частных производных», Гент, Бельгия, 20 мая 2022 г.;

- Досмағұлова Қ.А. Дельтаобразные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере // Стендовый доклад “PhD Day”, Льеж, Бельгия, 13 мая 2022 г.;

- Досмағұлова Қ.А. Дельтаобразные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере // Тезисы докладов Международной традиционной апрельской научной конференции, посвящённой Дню работников науки Республики Казахстан, Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан, 6-8 апреля 2022 г.;

- Досмағұлова Қ., Кангузин Б.Е. «Дельтаобразные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере», Международная конференция им. И.Г. Петровского (24-я сессия), 26.12.2021-30.12.2021;

- Досмағұлова Қ. Спектральный анализ оператора Лапласа-Бельтрами на римановых многообразиях // Труды Международной научной конференции Уфимская осенняя математическая школа – 2021, Уфа, 6 – 9 октября 2021 г.;

- Досмағұлова Қ.А. Спектральный анализ дифференциального оператора на компактном римановом многообразии // Тезисы 13-го международного конгресса ISAAC, стр. 90, Гент, Бельгия, 2-6 августа 2021 г.

Публикации. По результатам диссертации опубликовано 11 работ: 6 статей в журналах, индексируемых в Scopus и Web of Science, и 5 работ в трудах международных научных конференций:

1) Kanguzhin B.E., Dosmagulova K.A., Well-posed problems for the Laplace-Beltrami operator on a punctured two-dimensional sphere // Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl. 7(2) (2023) 428-440.

2) Dosmagulova K., Kanguzhin B., Fazullin Z., Spectrum of a Perturbed Harmonic Oscillator // Appl. Math. Inf. Sci. 17(4) (2023) 553-557.

3) Dosmagulova K., Kanguzhin B., Uniquely solvable problems for the Laplace-Beltrami operator on a sphere punctured by a curve // Results in Nonlinear Analysis, 6(3) (2023) 43-49.

4) Dosmagulova K.A., Kanguzhin B.E. On Green's function of the perturbed Laplace-Beltrami operator with a finite number of punctured points on the two-dimensional sphere // Birkhauser, Trends in Mathematics Series, volume Women in Analysis and PDE 5 (2024) 145-151.

5) Kanguzhin B., Dosmagulova K., Akanbay Y. On the Laplace-Beltrami operator in stratified sets composed of punctured circles and segment // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 125(1), (2025).

6) Dosmagulova K.A., Kanguzhin B.E., Well-posed problems for the Laplace-Beltrami operator // Symmetry, 17(9), 1377, (2025).

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из титульного листа, содержания, введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Общий объем диссертации составляет: 100 страниц со 62 литературными ссылками.

Основное содержание диссертации. Во введении излагаются актуальность темы исследования, цели и задачи, основные положения, выносимые на защиту диссертации, объект и предмет исследования, связь диссертационной работы с другими научными исследованиями, апробация работы, публикации автора, объем и структура диссертации, содержание.

В главе 1 изучаются дельтаобразные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами на римановом многообразии без границ. Также рассматривается двумерная сфера из $\mathbb{R}^3$ как риманово многообразие. Аналогичные построения можно провести для оператора Лапласа-Бельтрами на гладких многообразиях без границ. Другие возможности связаны с описанием корректных ограничений линейных дифференциальных операторов на гладких многообразиях с границей. Наконец, представляет интерес проблема описания корректных задач для эллиптических дифференциальных операторов на многообразиях с границей, состоящей из компонент разных размерностей. Также мы вводим функцию Грина возмущённого оператора Лапласа-Бельтрами, определённого на двумерной сфере. Приводятся описания линейных функционалов для произвольной точки из проколотой сферы. Приводятся выражения функции Грина $\varepsilon_\gamma(x, t)$ через $\varepsilon(x, t)$.

В главе 2 из сферы удаляется фиксированная дуга и исследуются дополнительные условия, которые должны удовлетворять решению на удалённой дуге, чтобы гарантировать единственность такого решения.

В главе 3 из четырёхмерного пространства удалена окружность на трёхмерной сфере. Требуется описать корректно разрешимые задачи для уравнения Лапласа-Бельтрами на полученной области. В работе рассматривается класс таких задач для уравнения Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере с разрезом по окружности.

В главе 4 изучаются собственные функции возмущённого оператора Лапласа-Бельтрами, определённого на двумерной сфере. Приводятся описания линейных функционалов для произвольной точки проколотой сферы. Показана связь между собственными значениями и собственными функциями оператора, а также дано полное описание системы собственных функций. В работе доказано свойство дискретности спектра оператора Лапласа-Бельтрами на проколотой двумерной сфере. Приведён также пример для линейных непрерывных функционалов, где первый функционал определяется через интеграл, а два других равны нулю. Пример представляет собой явное использование теоремы, доказательство которой использовало ранее полученные результаты для возмущённого оператора. Инвариантность оператора Лапласа-Бельтрами относительно изометрий влечёт совпадение спектра оператора Лапласа-Бельтрами изометрических римановых многообразий. Таким образом, спектр оператора является изометрическим инвариантом.

Во второй части главы 4 изучаются собственные функции возмущённого гармонического осциллятора. Приводятся описания линейных функционалов для произвольной точки. Показана связь между собственными значениями и собственными функциями оператора, возмущённого и невозмущённого операторов. В работе доказано свойство дискретности спектра гармонического осциллятора на прямой оси. Приведён также пример, в котором первый функционал определён через интеграл, а остальные пять равны нулю. Пример представляет собой явное использование теоремы, доказательство которой основано на ранее полученных результатах для возмущённого оператора.

В заключении изложены основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы.

Благодарность. Автор искренне благодарит отечественного научного консультанта, доктора физико-математических наук, профессора Кангужина Балтабека Есматовича за ценные советы, постоянное внимание, научное руководство и всестороннюю поддержку на всех этапах выполнения диссертационной работы, а также зарубежного научного консультанта, профессора Михаила Владимировича Ружанского, за содействие, плодотворное сотрудничество и гостеприимство во время научных стажировок в Гентском университете (Бельгия).

1 ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА ПРОКОЛОТОЙ ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ

В данной работе исходным пунктом является выбор фиксированного обратимого самосопряжённого оператора A_1 , действующего в гильбертовом пространстве H_1 . Область определения оператора A_1 обозначим через $D(A_1)$. Допустим, что существует конечный набор элементов $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\}$, которые не принадлежат $D(A_1)$. В принципе некоторые элементы набора $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ могут не принадлежать пространству H_1 , так как эти элементы вводятся формально для описания возможных граничных или сингулярных возмущений оператора A_1 и могут рассматриваться как обобщённые элементы (функционалы), действующие на H_1 . Обозначим линейную оболочку набора $\{\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)\}$ через H_2 и считаем, что $\dim H_2 = k$. Пусть A_2 - некоторый линейный оператор, переводящий элементы пространства H_2 в элементы другого пространства H_3 . Размерность пространства H_3 считается равной размерности пространства H_2 . Присоединим к H_1 конечномерное пространство H_2 , базис которого состоит из элементов не принадлежащих $D(A_1)$. Будем считать, что блочный оператор $A = A_1 \oplus A_2$ действует из гильбертова пространства H в пространство $\tilde{H} = H_1 + H_3$. Обозначим через P_1 проектор в H на H_1 . Через P_2 обозначим оператор $I - P_1$. Введём множество D всех элементов h из H представимых в виде

$$h = g + \sum_{j=1}^k \alpha_j \psi_j \quad (1.1)$$

при некоторых g из $D(A_1)$ и $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k$, где $\mathbb{C}^k$ – пространство непрерывных k -мерных векторов, состоящих из коэффициентов $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Заметим, что представление (1.1) единственно. Поэтому удобно ввести линейный оператор J сопоставляющий элементу $h \in H$ элемент g из $D(A_1)$. Точно также α_j при $j = 1, \dots, k$ являются линейными функционалами от h . На множестве D определим оператор $A_{\max}$ по формуле

$$A_{\max} h = A_1 J h + \sum_{j=1}^k \beta_j(Jh) A_2 \psi_j,$$

где $\{\beta_1(\cdot), \beta_2(\cdot), \dots, \beta_k(\cdot)\}$ фиксированный набор линейных функционалов в пространстве H_1 . Оператор $A_{\max}$ называем максимальным оператором, так как операторное уравнение

$$A_{\max} h = f, \forall f \in \tilde{H} \quad (1.2)$$

имеет решение из множества D . Если $h_0 \in D$ является решением уравнения (1.2), то при любых $\gamma_1 \in \mathbb{C}, \dots, \gamma_k \in \mathbb{C}$ выражение $h_0 + \gamma_1 \psi_1 + \dots + \gamma_k \psi_k$ также представляет решение уравнения (1.2). Понятие и определение максимального оператора можно найти в работе [15].

Естественно, возникает вопрос: на каком подмножестве D_0 множества D операторное уравнение (1.2) при любых $f \in \tilde{H}$, имеет единственное решение? Данная работа посвящена полному описанию таких подмножеств D_0 в случае, когда A_1 - оператор Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере S^2 из $\mathbb{R}^3$. В этом случае речь идет об описании обратимых сужений максимального оператора. Часто требуется, чтобы решение операторного уравнения (1.2) дополнительно обладало следующим свойством: при малых изменениях f мало изменяется соответствующее решение h . Такие сужения максимального оператора мы называем обратимыми сужениями с непрерывными обратными операторами. В настоящей работе в случае оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере из $\mathbb{R}^3$ описаны сужения с непрерывными обратными операторами.

Остановимся на некоторых специфических особенностях подобных задач. Мы проиллюстрируем их на простейшем случае оператора Лапласа, заданного на единичном шаре $\Omega = \{|x| < 1\}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Как известно задача Дирихле для оператора Лапласа состоит в следующем

$$\Delta u(x) = f(x), \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.3)$$

Задача Дирихле (1.3) имеет единственное решение $u(x)$ для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$. Причем решение задается формулой $u(x) = \int_{\Omega} G(x, t) f(t) dt$, где $G(x, t)$ - соответствующая функция Грина. В качестве оператора рассмотрим $A_1(-\Delta)$ в гильбертовом пространстве $H_1 = L_2(\Omega)$. Фиксируем точку x_0 , удовлетворяющую условию $|x_0| < 1$. Рассмотрим набор из четырёх функций

$$\left\{ \psi_0(x) = G(x, x_0), \psi_j(x) = \frac{\partial G(x, t)}{\partial t_j} \Big|_{t=x_0}, j = 1, 2, 3 \right\}.$$

Понятно, что функций $\psi_j(x) \notin D(A_1), j = 0, 1, 2, 3$, так как имеют особенности при $x = x_0$. В пространстве $H = H_1 + H_2$ рассмотрим блочный оператор $A = A_1 \oplus A_2$, где A_2 - оператор Лапласа. Как видно из этого примера пространство H шире пространства H_1 . В данном случае $A_2 \psi_j \equiv 0$ при $x \neq x_0$, так как $A_2 = -\Delta$.

Введём максимальный оператор $A_{\max}$ на множестве D , элементы h которого задаются соотношениями (1.1)

$$A_{\max}h = A_1Jh.$$

Требуется привести описание обратимых сужений максимального оператора. В работе [16] для решения подобных проблем используются методы теории расширений линейных операторов. В отличие от работы [16] в настоящей работе применяются методы сужений линейных операторов [17-18]. В статье [19] дано корректное определение формального оператора Лапласа с дельтаобразным возмущением. Для определения области используются предельные потенциалы простого и двойного слоёв. Доказано, что по набору спектров некоторых эталонных операторов можно однозначно восстановить граничные плотности потенциалов и двойного слоя. При этом один из опорных операторов совпадает с исходным оператором Лапласа с дельтаобразным возмущением. В работе [13] даётся корректное определение оператора Лапласа с дельтаобразными потенциалами. Исследовано корректно разрешимое точечное возмущение и описаны формулы резольвенты. Изучены некоторые свойства резольвенты. В статье [20] исследуется локализация дискретного спектра некоторых возмущений двумерного гармонического осциллятора. Там же исследуется сходимость разложения функции источника по собственным функциям двумерного гармонического осциллятора и получено представление функции Грина двумерного гармонического осциллятора. В статье [14] из многомерного шара вырезается внутреннее замкнутое (без края) гладкое многообразие меньшей размерности. В рассматриваемой области корректно определены обратимые ограничения оператора Лапласа. В частности, определена корректная негладкая задача Бицадзе-Самарского для уравнения Лапласа. В статье [6] показано корректное определение эллиптических операторов с переменными коэффициентами второго порядка с точечными взаимодействиями и даны формулы их резольвент. В работе [21] исследованы изменения конечной части спектра оператора Лапласа при дельтаобразных возмущениях. В статье [22] изучаются дифференциальные операторы на произвольных геометрических графах без петель. Для введённого максимального оператора доказан аналог формулы Лагранжа. Приведён алгоритм построения присоединённых граничных форм для произвольного набора граничных условий. Также дано полное описание всех самосопряжённых ограничений максимального оператора. В работе [23] в гильбертовом пространстве рассмотрен класс корректных задач для уравнения Пуассона в проколотой области. Исследуются свойства функции Грина. В статье [4] дано полное описание корректно разрешимых краевых задач для оператора Лапласа в проколоте круге. Также приведены формулы резольвент корректных задач для оператора Лапласа в проколоте круге. В статье [5] описаны резольвенты корректных задач для возмущений конечного ранга полигармонического оператора в проколоте шаре.

В отличие от вышеуказанных работ в настоящей работе исходный оператор Лапласа-Бельтрами определен на римановом многообразии без края. В последующих пунктах приведено описание корректных задач для оператора Лапласа-Бельтрами на проколотовой двумерной сфере S^2 из $\mathbb{R}^3$.

1.1 Основные понятия об операторе Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере

В функциональном пространстве $L_2(S^2)$ рассмотрим оператор Лапласа-Бельтрами B_0 на двумерной сфере, определяемый как оператор, переводящий всякую функцию $v(x) \in W_2^2(S^2)$ в функцию $-\hat{\Delta}'_{S^2} v(x) \in L_2(S^2)$. Выражение оператора Лапласа-Бельтрами $I - \hat{\Delta}'_{S^2}$ в сферических координатах задается формулой

$$\widehat{\Delta'_{S^2} v}(\theta, \varphi) = \hat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \hat{v}(\theta, \varphi),$$

где $\hat{v}(\theta, \varphi) = v(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, (θ, φ) - углы сферических координат. Здесь $\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi}$ - дифференциальный оператор 2-го порядка, определяемый формулой

$$\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \hat{v} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varphi^2}.$$

Здесь мы пользуемся определениями пространств гладких функций на гладком многообразии и дифференциального оператора на таком многообразии [24]. Выражение оператора $\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi}$ и оператора Лапласа-Бельтрами $\hat{\Delta}'_{S^2}$ в сферической системе зависит от углов (θ, φ) . При этом выражение $\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi}$ имеет особенности при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. На самом деле, $\hat{\Delta}'_{S^2}$ во всех точках сферы S^2 расположен совершенно одинаково и поэтому не имеет особенностей.

Заметим [24], что оператор B_0 симметричен и неотрицателен в пространстве $L_2(S^2)$.

Известно [25], что собственные значения оператора B_0 могут быть лишь числа $\lambda_l = 1 + l(l+1)$, где $l \geq 0$ - целые. Собственные функции оператора B_0 задаются по формуле:

$$\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_{lm}(\cos \theta) \cos m\varphi, m = 0, \dots, l \\ P_{l|m|}(\cos \theta) \sin |m|\varphi, m = -1, -2, \dots, -l. \end{cases}$$

где $P_{lm}(\cos \theta)$ представляет присоединенные функций Лежандра. Заметим, что собственные функций оператора B_0 действительно обладают свойством

$$\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi) = \hat{Y}_{lm}(\pi - \theta, \pi + \varphi).$$

Для того, чтобы убедиться в вышеприведенном равенстве достаточно проверить, что чётность присоединённых функции Лежандра $P_{lm}(t)$ совпадают с четностью значения $l + |m|$.

Известно [25], что система собственных функций оператора B_0 является ортогональным базисом в пространстве функций $L_2(S^2)$.

Кроме того, заметим, что имеют место равенства

$$(Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi))_{S^2} = \begin{cases} \frac{4\pi}{2l+1}, m = 0 \\ \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \frac{2\pi}{2l+1}, 1 \leq |m| \leq l. \end{cases}$$

1.2 Функция Грина оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере

В этом пункте мы введём функцию $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi, \alpha, \beta)$ по формуле

$$\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi, \alpha, \beta) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} \sum_{m=-l}^l \frac{\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi) \hat{Y}_{lm}(\alpha, \beta)}{\frac{2\pi}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}} \quad (1.4)$$

при

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta, \alpha \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi, \beta \leq 2\pi, \end{aligned}$$

где

$$\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_{lm}(\cos \theta) \cos m\varphi, m = 0, \dots, l \\ P_l(\cos \theta) \sin |m| \varphi, m = -1, -2, \dots, -l \end{cases}$$

$$P_{l|m|}(t) = (1-t^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dt^{|m|}} P_l(t)$$

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dt^l} (t^2 - 1)^l.$$

Указанные представления $\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi), P_l(t), P_{l|m|}(t)$ даны в работе [24]. В следующей лемме приведено компактное представление выше введённой функции $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$.

Лемма 1.1. Функция $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$ при $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ имеет представление

$$\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\omega \frac{1}{\sqrt{2\cos t - \cos \omega}} \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) \ln \frac{1}{2(1 - \cos t)} - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt,$$

где $\cos \omega = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos(\varphi - \beta)$.

Доказательство Леммы 1.1. В монографии [24] приведена формула сложения для сферической функции

$$P_l(\cos \omega) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \frac{\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi) \hat{Y}_{lm}(\alpha, \beta)}{\frac{2\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}},$$

где $\cos \omega = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos(\varphi - \beta)$.

Поэтому из соотношения (1.1) можем записать следующее представление для функции

$$\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l(\cos \omega). \quad (1.5)$$

В монографии [26] приведено интегральное представление Мейера для многочлена Лежандра

$$P_l(\cos \omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\omega \frac{\cos\left(l + \frac{1}{2}\right)t}{\sqrt{2\cos t - 2\cos \omega}} dt.$$

Поэтому можно следующим образом преобразовать функцию

$$\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\omega \frac{1}{\sqrt{2\cos t - 2\cos \omega}} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \cos\left(l + \frac{1}{2}\right)t \right) dt.$$

Вычислим сумму ряда

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \cos\left(l + \frac{1}{2}\right)t = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos\left(l + \frac{1}{2}\right)t}{l} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos\left(l + \frac{1}{2}\right)t}{l+1} = \\
& = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos\left(l + \frac{1}{2}\right)t}{l} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\cos\left(l - \frac{1}{2}\right)t}{l} = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos(lt)}{l} - \cos\left(\frac{t}{2}\right).
\end{aligned}$$

Поскольку в справочнике [27] вычислены суммы следующего ряда

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos lt}{l} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1 - \cos t)}, \quad 0 < t < 2\pi,$$

то запишем сумму ряда в виде

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \cos\left(l + \frac{1}{2}\right)t = \cos \frac{t}{2} \ln \frac{1}{2(1 - \cos t)} - \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

Отсюда вытекает следующее представление

$$\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\omega} \frac{1}{\sqrt{2 \cos t - 2 \cos \omega}} \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) \ln \frac{1}{2(1 - \cos t)} - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt.$$

Лемма 1.1 полностью доказана. В дальнейшем полезно следующее утверждение.

Лемма 1.2. Для любой функции $f(\theta, \varphi) \in L_2(S^2)$ справедлива формула

$$\begin{aligned}
& -\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \left(\int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) f(\alpha, \beta) d\beta \right) = f(\theta, \varphi) - \\
& \quad \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} f(\alpha, \beta) d\beta,
\end{aligned}$$

где оператор Лапласа-Бельтрами определён по формуле

$$\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Доказательство Леммы 1.2. Обозначим через

$$\hat{u}(\theta, \varphi) = \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) f(\alpha, \beta) d\beta. \quad (1.6)$$

Учитывая представление (1.1) для функции $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$, равенство (1.6) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{u}(\theta, \varphi) &= \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} \sum_{m=-l}^l \frac{\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi)}{\sqrt{\frac{2\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}}} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\hat{Y}_{lm}(\alpha, \beta)}{\sqrt{\frac{2\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}}} f(\alpha, \beta) d\beta. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\frac{\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi)}{\sqrt{\frac{2\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}}}$ представляет нормированную собственную функцию оператора Лапласа-Бельтрами $(-\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi})$, соответствующую собственному значению $l(l+1)$, то выполняется равенство

$$-\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) \hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi).$$

Поэтому выражение $\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \hat{u}(\theta, \varphi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} &-\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \hat{u}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi)}{\sqrt{\frac{2\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}}} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\hat{Y}_{lm}(\alpha, \beta)}{\sqrt{\frac{2\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}}} f(\alpha, \beta) d\beta. \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства равна $f(\theta, \varphi) - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} f(\alpha, \beta) d\beta$, так как $\left\{ \frac{1}{4\pi}, \frac{\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi)}{\sqrt{\frac{2\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}}}, l \geq 1, l \leq m \leq l \right\}$ представляет ортонормированный базис пространства $L_2(S^2)$. Лемма 1.2 полностью доказана.

Из лемм 1.1 и 1.2 вытекает, что функция

$$\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\omega \frac{1}{\sqrt{2\cos t - 2\cos \omega}} \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) \ln \frac{1}{2(1 - \cos t)} - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt$$

представляет функцию Грина неоднородного уравнения Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере $-\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi} u(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$ в пространстве функции $\tilde{L}_2(S^2)$.

Здесь $\tilde{L}_2(S^2)$ состоит из функций, принадлежащих пространству $L_2(S^2)$ ортогональных постоянной функций.

Теперь выясним гладкостные свойства функции Грина. В монографии [27] для полинома Лежандра приведено асимптотическое представление при $l \rightarrow \infty$

$$P_l(\cos \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi l \sin \omega}} \sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{\pi}{4} \right] + r_l(\omega), \quad (1.7)$$

здесь $0 < \delta \leq \omega \leq \pi - \delta$. Отметим, что $r_l(\omega) = \frac{q_l(\omega)}{l}$ и $|q_l(\omega)| < c$ равномерно во всем замкнутом интервале $[\delta, \pi - \delta]$. Используя указанное асимптотическое представление (1.7), найдём гладкостные свойства функций Грина $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$.

Для дальнейших исследований удобно ввести три следующих функции

$$\begin{aligned} K_1(\omega) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l+1)\sqrt{l}} \sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{\pi}{4} \right], \\ K_2(\omega) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l\sqrt{l}} \sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{\pi}{4} \right], \\ K_3(\omega) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l^2(l+1)} q_l(\omega). \end{aligned}$$

Лемма 1.3. Пусть δ произвольное положительное число. Тогда функция Грина $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$ имеет при $\delta < \omega < \pi - \delta$ следующее представление

$$\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \omega}} (K_1(\omega) + K_2(\omega)) + K_3(\omega). \quad (1.8)$$

Здесь $\cos \omega = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos(\varphi - \beta)$.

Доказательство леммы 1.3. В ходе доказательства леммы 1.1 для функции Грина $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$ получено представление (1.5). В представление (1.5) подставим асимптотическую формулу (1.7). В результате получим представление (1.8). Заметим, что ряды $K_1(\omega), K_2(\omega), K_3(\omega)$ сходятся абсолютно и равномерно во всем замкнутом интервале $[\delta, \pi - \delta]$. Лемма 1.3 полностью доказана.

Замечание 1.4. Функций $K_1(\omega), K_2(\omega), K_3(\omega)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями на интервале $(0, \pi)$.

Замечание 1.5. Согласно лемме 1.3 функция Грина $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$ задаётся формулой (1.8) при $\omega \in (0, \pi)$ и учитывая замечание 1.4 представляет непрерывно дифференцируемую функцию от ω на интервале $(0, \pi)$.

Замечание 1.6. Из представления (1.8) вытекает, что функция Грина $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$ имеет особенности при $\sin \omega = 0$. В то же время $\sin \omega = 0$ при $\omega = 0$ и $\omega = \pi$. Таким образом, функция Грина $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$ имеет две особенности в точках $(\theta, \varphi) = (\alpha, \beta)$ и $(\theta, \varphi) = (\pi - \alpha, \pi + \beta)$.

1.3 Корректное определение максимального оператора

Выберем произвольную точку (θ_0, φ_0) на двумерной сфере S^2 . Обозначим через $S_0^2 = S^2 \setminus \{(\theta_0, \varphi_0)\}$. Рассмотрим на двумерной сфере S^2 окрестность точки (θ_0, φ_0) , определяемую следующим образом

$$\Pi_1^0(\delta) = \{(\theta, \varphi) \in S^2: |\theta - \theta_0| < \delta, |\varphi - \varphi_0| < \delta\},$$

где $\delta > 0$. Окрестность точки $(\pi - \theta_0, \pi + \varphi_0)$ обозначим через

$$\Pi_2^0(\delta) = \{(\theta, \varphi) \in S^2: |\theta - \pi + \theta_0| < \delta, |\varphi - \pi - \varphi_0| < \delta\}.$$

Также удобно обозначить объединение окрестностей через

$$\Pi^0(\delta) = \Pi_1^0(\delta) \cup \Pi_2^0(\delta).$$

Введём класс функций

$$W_{2,loc}^2(S_0^2) = \bigcup_{\delta>0} W_2^2(S^2 \setminus \Pi^0(\delta)),$$

где W_2^2 – соболевское пространство второго порядка с квадратосуммируемыми функциями и их слабыми производными до второго порядка.

Для дальнейших целей нам удобно ввести следующие линейные функционалы по формулам

$$\begin{aligned} U_0(\hat{h}) = & \sin \theta_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\theta_0 - \delta, \beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial \hat{h}(\theta_0 + \delta, \beta)}{\partial \alpha} \right) d\beta + \right. \\ & \left. + \int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\alpha, \varphi_0 - \delta)}{\partial \beta} - \frac{\partial \hat{h}(\alpha, \varphi_0 + \delta)}{\partial \beta} \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right], \end{aligned}$$

$$U_1(\hat{h}) = \sin \theta_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} \left(\hat{h}(\theta_0 + \delta, \beta) - \hat{h}(\theta_0 - \delta, \beta) \right) d\beta \right],$$

$$U_2(\hat{h}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} \left(\hat{h}(\alpha, \varphi_0 + \delta) - \hat{h}(\alpha, \varphi_0 - \delta) \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right],$$

$$U_3(\hat{h}) = \sin \theta_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\pi + \varphi_0 - \delta}^{\pi + \varphi_0 + \delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\pi - \theta_0 - \delta, \beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial \hat{h}(\pi - \theta_0 + \delta, \beta)}{\partial \alpha} \right) d\beta + \right. \\ \left. + \int_{\pi - \theta_0 - \delta}^{\pi - \theta_0 + \delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_0 - \delta)}{\partial \beta} - \frac{\partial \hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_0 + \delta)}{\partial \beta} \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right],$$

$$U_4(\hat{h}) = \sin \theta_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\pi + \varphi_0 - \delta}^{\pi + \varphi_0 + \delta} \left(\hat{h}(\pi - \theta_0 + \delta, \beta) - \hat{h}(\pi - \theta_0 - \delta, \beta) \right) d\beta \right],$$

$$U_5(\hat{h}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\pi - \theta_0 - \delta}^{\pi - \theta_0 + \delta} \left(\hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_0 + \delta) - \hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_0 - \delta) \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right].$$

Также нам понадобится следующий класс функций

$$W_{2,U}^2(S_0^2) = \{ \hat{h}(\theta, \varphi) \in W_{2,loc}^2(S_0^2) : \\ \exists U_0(\hat{h}), U_1(\hat{h}), U_2(\hat{h}), U_3(\hat{h}), U_4(\hat{h}), U_5(\hat{h}) \text{ конечные значения} \}.$$

Возьмём произвольную функцию $\hat{h}(\theta, \varphi)$ из класса $W_{2,U}^2(S_0^2)$. Обозначим через

$$\hat{g}(\theta, \varphi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S^2 \setminus \Pi^0(\delta)} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) \left(-\hat{\Delta}'_{\alpha\beta} \hat{h}(\alpha, \beta) \right) \sin \alpha d\alpha.$$

Важное свойство функции $\hat{g}(\theta, \varphi)$ указано в следующем утверждении.

Лемма 1.7. Пусть $\hat{h}(\alpha, \beta)$ произвольный элемент из класса $W_{2,U}^2(S_0^2)$. Тогда функция $\hat{g}(\theta, \varphi)$ представляется в следующем виде

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\theta, \varphi) &= \hat{h}(\theta, \varphi) + \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) U_0(\hat{h}) + \\
&+ \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)}{\partial \alpha} U_1(\hat{h}) + \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)}{\partial \beta} U_2(\hat{h}) + \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \pi - \theta_0, \pi + \varphi_0) U_3(\hat{h}) + \\
&+ \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \pi - \theta_0, \pi + \varphi_0)}{\partial \alpha} U_4(\hat{h}) + \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \pi - \theta_0, \pi + \varphi_0)}{\partial \beta} U_5(\hat{h})
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Замечание 1.8. Из представления (1.9) вытекает, что функция $\hat{g}(\theta, \varphi)$ непрерывна в точках $(\theta_0, \varphi_0), (\pi - \theta_0, \pi + \varphi_0)$ и однозначно определяется функцией $\hat{h}(\theta, \varphi)$. В то же время функция $\hat{h}(\theta, \varphi)$ может иметь особенности в точках (θ_0, φ_0) и $(\pi - \theta_0, \pi + \varphi_0)$. Поэтому функцию $\hat{g}(\theta, \varphi)$ можно считать регуляризацией функций $\hat{h}(\theta, \varphi)$.

Доказательство Леммы 1.7. Преобразуем функцию $\hat{g}(\theta, \varphi)$, используя ее определение и определение оператора Лапласа-Бельтрами. Отдельно вычислим следующий предел

$$\begin{aligned}
&\hat{T}(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) = \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} \left[\left(\int_0^{\theta_0 - \delta} + \int_{\theta_0 + \delta}^{\pi} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin \alpha \frac{\partial \hat{h}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right) \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) d\alpha \right] d\beta + \\
&+ \left(\int_0^{\theta_0 - \delta} + \int_{\theta_0 + \delta}^{\pi} \right) \left[\int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 \hat{h}(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) d\beta \right] d\alpha + \\
&+ \left(\int_0^{\varphi_0 - \delta} + \int_{\varphi_0 + \delta}^{2\pi} \right) \left(\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sin \alpha \frac{\partial \hat{h}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) d\alpha \right) d\beta + \\
&+ \int_0^{\pi} \left[\left(\int_0^{\varphi_0 - \delta} + \int_{\varphi_0 + \delta}^{2\pi} \right) \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 \hat{h}(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) d\beta \right] d\alpha = \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} \left[\sin \alpha \frac{\partial \hat{h}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) - \right. \\
&\quad \left. - \hat{h}(\alpha, \beta) \sin \alpha \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=\theta_0 - \delta}^{\alpha=\theta_0 + \delta} d\beta + \\
&+ \left(\int_0^{\theta_0 - \delta} + \int_{\theta_0 + \delta}^{\pi} \right) \frac{1}{\sin \alpha} \left[\frac{\partial \hat{h}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) - \right. \\
&\quad \left. - \hat{h}(\alpha, \beta) \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)}{\partial \beta} \right]_{\beta=\varphi_0 - \delta}^{\beta=\varphi_0 + \delta} d\alpha + \\
&+ \left(\int_0^{\varphi_0 - \delta} + \int_{\varphi_0 + \delta}^{2\pi} \right) \left[\sin \alpha \frac{\partial \hat{h}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) d\alpha \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\hat{h}(\alpha, \beta) \sin(\alpha) \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \Big]_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} d\beta + \\
& + \int_0^\pi \left[\frac{\partial \hat{h}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) - \hat{h}(\alpha, \beta) \frac{\partial \varepsilon(\theta, \hat{\varphi}; \alpha, \beta)}{\partial \beta} \right]_{\beta=\varphi_0+\delta}^{\beta=\varphi_0-\delta} \frac{d\alpha}{\sin \alpha} + \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \hat{h}(\theta, \varphi) \Delta_S \varepsilon(\theta, \varphi; \alpha, \beta) d\alpha d\beta = \\
& = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sin \theta_0 \int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\theta_0-\delta, \beta)}{\partial \alpha} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0-\delta, \beta) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial \hat{h}(\theta_0+\delta, \beta)}{\partial \alpha} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0+\delta, \beta) d\beta - \right. \\
& \quad - \lim_{\delta \rightarrow 0} \sin \theta_0 \int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} \left[\hat{h}(\theta_0-\delta, \beta) \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0-\delta, \beta)}{\partial \alpha} - \right. \\
& \quad \left. - \hat{h}(\theta_0+\delta, \beta) \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0+\delta, \beta)}{\partial \alpha} \right] d\beta + \\
& \quad + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\alpha, \varphi_0-\delta)}{\partial \beta} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \varphi_0-\delta) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial \hat{h}(\alpha, \varphi_0+\delta)}{\partial \beta} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \varphi_0+\delta) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} - \right. \\
& \quad - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} \left(\hat{h}(\alpha, \varphi_0-\delta) \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \varphi_0-\delta)}{\partial \beta} - \right. \\
& \quad \left. - \hat{h}(\alpha, \varphi_0+\delta) \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \varphi_0+\delta)}{\partial \beta} \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} + \\
& \quad + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \hat{h}(\theta, \varphi) \Delta_S \varepsilon(\theta, \varphi; \alpha, \beta) d\alpha d\beta.
\end{aligned}$$

Точно также вычисляется значение

$$\begin{aligned}
& \hat{T}(\theta, \varphi, \pi - \theta_0, \pi + \varphi_0) = \\
& = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sin \theta_0 \int_{\pi+\varphi_0-\delta}^{\pi+\varphi_0+\delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\pi - \theta_0 - \delta, \beta)}{\partial \alpha} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \pi - \theta_0 - \delta, \beta) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial \hat{h}(\pi - \theta_0 + \delta, \beta)}{\partial \alpha} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \pi - \theta_0 + \delta, \beta) \right) d\beta - \\
& - \lim_{\delta \rightarrow 0} \sin \theta_0 \int_{\pi+\varphi_0-\delta}^{\pi+\varphi_0+\delta} \left[\hat{h}(\pi - \theta_0 - \delta, \beta) \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \pi - \theta_0 - \delta, \beta)}{\partial \alpha} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\hat{h}(\pi - \theta_0 + \delta, \beta) \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi, \pi - \theta_0 + \delta, \beta)}{\partial \alpha} \Big] d\beta + \\
& + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\pi - \theta_0 - \delta}^{\pi - \theta_0 + \delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_0 - \delta)}{\partial \beta} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \pi + \varphi_0 - \delta) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial \hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_0 + \delta)}{\partial \beta} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \pi + \varphi_0 + \delta) \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} - \\
& - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\pi - \theta_0 - \delta}^{\pi - \theta_0 + \delta} \left(\hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_0 - \delta) \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \pi + \varphi_0 - \delta)}{\partial \beta} - \right. \\
& \quad \left. - \hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_0 + \delta) \frac{\partial \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \pi + \varphi_0 + \delta)}{\partial \beta} \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha}.
\end{aligned}$$

Далее используем тот факт, что $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$, $\frac{\partial}{\partial \alpha} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$, $\frac{\partial}{\partial \beta} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$ являются непрерывными функциями при $(\theta, \varphi) \neq (\theta_0, \varphi_0)$ и $(\theta, \varphi) \neq (\pi - \theta_0, \pi + \varphi_0)$. В результате получим представление (1.6). Таким образом Лемма 1.7 полностью доказана.

Обозначим непрерывные функции через

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_0(\theta, \varphi) &= \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0), \\
\hat{\psi}_1(\theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0), \\
\hat{\psi}_2(\theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial \beta} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0), \\
\hat{\psi}_3(\theta, \varphi) &= \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \pi - \theta_0, \pi + \varphi_0), \\
\hat{\psi}_4(\theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \pi - \theta_0, \pi + \varphi_0), \\
\hat{\psi}_5(\theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial \beta} \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \pi - \theta_0, \pi + \varphi_0)
\end{aligned}$$

при $(\theta, \varphi) \in S_0^2$.

Из Леммы 1.7 вытекает следующее следствие.

Следствие 1.9. Справедливы равенства при $(\theta, \varphi) \in S_0^2$:

$$U_j(\hat{\psi}_k) = \delta_{jk}, j, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

где δ_{jk} - символ Кронекера. Действительно, из определения функций Грина $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$ следует равенство

$$-\hat{\Delta}'_{\theta,\varphi}\hat{\varepsilon}(\theta,\varphi;\theta_0,\varphi_0)=0$$

при $(\theta,\varphi)\neq(\theta_0,\varphi_0)$ и $(\theta,\varphi)\neq(\pi-\theta_0,\pi+\varphi_0)$. Если в Лемме 1.4 $\hat{h}(\theta,\varphi)$ выбрать равными $\hat{\psi}_j(\theta,\varphi)$ при $j=\overline{0,5}$, то из леммы 1.7 вытекает утверждение следствия 1.9.

Выше введённое пространство $W_{2,U}^2(S_0^2)$ шире, чем область определения $D(B_0)$ оператора B_0 . Определим максимальный оператор $B_{\max}$ на множестве функций $W_{2,U}^2(S_0^2)$ по формуле

$$B_{\max}\hat{h}(\theta,\varphi)=B_0\left(\hat{h}(\theta,\varphi)+\sum_{j=0}^5\hat{\psi}_j(\theta,\varphi)U_j(\hat{h})\right)$$

для $(\theta,\varphi)\neq(\theta_0,\varphi_0)$ и $(\theta,\varphi)\neq(\pi-\theta_0,\pi+\varphi_0)$. Оператор $B_{\max}$ называется максимальным оператором, так как неоднородное операторное уравнение $B_{\max}\hat{h}(\theta,\varphi)=\hat{F}(\theta,\varphi), (\theta,\varphi)\neq(\theta_0,\varphi_0), (\theta,\varphi)\neq(\pi-\theta_0,\pi+\varphi_0)$ имеет решение для любой правой части из $\tilde{L}_2(S^2)$. Однако неоднородное операторное уравнение может иметь несколько решений.

В следующем пункте область определения максимального оператора сужается так, чтобы указанное неоднородное уравнение на суженной области имело единственное решение. Такие операторы называются обратимыми сужениями максимального оператора.

1.4 Обратимые сужения максимального оператора

Для описания обратимых сужений максимального оператора $B_{\max}$ мы следуем методам работ Отелбаева [17]-[18]. Согласно Отелбаеву [17]-[18] для произвольной функций $h(x)$ из пространства $W_{2,U}^2(S_0^2)$ рассмотрим решение операторного уравнения $B_0g(x)=B_{\max}h(x)$. Используя функцию Грина $\varepsilon(x,t)$ из лемм 1.1 и 1.2, указанное решение можно записать в виде

$$g(x)=\lim_{\delta\rightarrow 0}\int_{S^2\setminus\Pi^0(\delta)}\varepsilon(x,t)B_{\max}h(t)dt.$$

Согласно лемме 1.7 решение $g(x)$ в сферической системе координат примет вид

$$\hat{g}(\theta, \varphi) = \hat{h}(\theta, \varphi) + \hat{\psi}_0(\theta, \varphi)U_0(\hat{h}) + \hat{\psi}_1(\theta, \varphi)U_1(\hat{h}) + \hat{\psi}_2(\theta, \varphi)U_2(\hat{h}) + \\ + \hat{\psi}_3(\theta, \varphi)U_3(\hat{h}) + \hat{\psi}_4(\theta, \varphi)U_4(\hat{h}) + \hat{\psi}_5(\theta, \varphi)U_5(\hat{h}).$$

Из последнего равенства вытекает полное описание области определения максимального оператора $D(B_{\max}) = W_{2,U}^2(S_0^2)$.

Лемма 1.10. Любой элемент $h(x)$ из пространства $W_{2,U}^2(S_0^2)$ имеет следующее представление

$$h(x) = g(x) - \sum_{j=0}^5 \psi_j(x)\gamma_j, \quad (1.10)$$

где гладкая функция $g(x) \in W_2^2(S^2)$, $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ - некоторые комплексные числа.

Таким образом, произвольный элемент из $D(B_{\max})$ задается гладкой чатью $g(x)$ и шестью числами. Причем числа $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ и функция $g(x)$ не зависимы друг от друга. Когда же выбирается область определения обратимого сужения, то область определения максимального оператора сужается. Область определения $D(B_{\max})$ сужается за счет того, что числа $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ и гладкая функция $g(x)$ зависят от функции $F(x)$, которая пробегает все $\tilde{L}_2(S^2)$. Отметим, что оператор B_0 обратим, так как

$$\forall \lambda_l \geq 1, \forall l \Rightarrow \exists B_0^{-1}f = \int_{S^2} f(t)\varepsilon(x, t)dt, \quad (1.11)$$

здесь $\varepsilon(x, t)$ – ядро оператора, то есть функция Грина.

Теперь мы сформулируем утверждение об обратимом сужении максимального оператора $B_{\max}$.

Теорема 1.11. Пусть $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ - линейные функционалы определенные на всем пространстве $L_2(S^2)$. Тогда сужение оператора $B_{\max}$ на множестве

$$D_{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5} = \{h(x) = B_0^{-1}F(x) - \gamma_0(F)\psi_0(x) - \gamma_1(F)\psi_1(x) - \gamma_2(F)\psi_2(x) - \\ - \gamma_3(F)\psi_3(x) - \gamma_4(F)\psi_4(x) - \gamma_5(F)\psi_5(x), \forall F \in L_2(S^2)\}$$

представляет обратимый оператор на всем пространстве $L_2(S^2)$. Если $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ - линейные ограниченные функционалы на $L_2(S^2)$, тогда соответствующее сужение максимального оператора на $D_{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5}$ имеет обратный оператор, который ограничен в следующем смысле

$$\{\gamma_0(F), \gamma_1(F), \gamma_2(F), \gamma_3(F), \gamma_4(F), \gamma_5(F), B_0^{-1}F(x)\} \rightarrow 0, F \xrightarrow{L_2(S^2)} 0.$$

Через $B_\gamma = B_{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5}$ обозначим обратимое сужение из теоремы 1.11. Ясно, что следующие граничные задачи

$$\begin{aligned} B_{\max} h(x) &= F(x), x \in S_0^2, \\ U_0(h) &= \gamma_0(B_{\max} h), U_1(h) = \gamma_1(B_{\max} h), U_2(h) = \gamma_2(B_{\max} h), \end{aligned} \quad (1.12)$$

соответствуют сужению B_γ . Решение этой проблемы единственно в $W_{2,U}^2(S_0^2)$ и имеет представление $h = (B_\gamma)^{-1} F$, где

$$\begin{aligned} (B_\gamma)^{-1} F &= B_0^{-1} F(x) - \gamma_0(F) \psi_0(x) - \gamma_1(F) \psi_1(x) - \gamma_2(F) \psi_2(x) - \\ &\quad - \gamma_3(F) \psi_3(x) - \gamma_4(F) \psi_4(x) - \gamma_5(F) \psi_5(x). \end{aligned}$$

Одно полезное наблюдение дано в следующем утверждении теоремы.

Теорема 1.12. Резольвента сужения B_γ имеет следующее представление

$$\begin{aligned} (B_\gamma - \lambda I)^{-1} F &= (B_0 - \lambda I)^{-1} F(x) - \\ &\quad - \gamma_0(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} F) B_\gamma (B_\gamma - \lambda I)^{-1} \psi_0(x) - \\ &\quad - \gamma_1(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} F) B_\gamma (B_\gamma - \lambda I)^{-1} \psi_1(x) - \\ &\quad - \gamma_2(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} F) B_\gamma (B_\gamma - \lambda I)^{-1} \psi_2(x) - \\ &\quad - \gamma_3(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} F) B_\gamma (B_\gamma - \lambda I)^{-1} \psi_3(x) - \\ &\quad - \gamma_4(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} F) B_\gamma (B_\gamma - \lambda I)^{-1} \psi_4(x) - \\ &\quad - \gamma_5(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} F) B_\gamma (B_\gamma - \lambda I)^{-1} \psi_5(x). \end{aligned}$$

Теорема 1.12. доказывается также как доказана теорема 2.3 в работе [5]. Чтобы сократить объем в дальнейшем считаем, что функционалы $\gamma_3(\cdot), \gamma_4(\cdot), \gamma_5(\cdot)$ равны тождественно нулю. Теперь вычислим резольвенту сужения B_γ , считая $\gamma_3 \equiv \gamma_4 \equiv \gamma_5 \equiv 0$. Для этого введём обозначения

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \\ &= \begin{vmatrix} 1 + \lambda \gamma_0(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \psi_0) & \lambda \gamma_1(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \psi_0) \\ \lambda \gamma_0(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \psi_1) & 1 + \lambda \gamma_1(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \psi_1) \\ \lambda \gamma_0(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \psi_2) & \lambda \gamma_1(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \psi_2) \\ & \lambda \gamma_2(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \psi_0) \\ & \lambda \gamma_2(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \psi_1) \\ & 1 + \lambda \gamma_2(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1} \psi_2) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$H(x; \lambda; F) = \begin{pmatrix} \gamma_0(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}F) & \gamma_1(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}F) \\ 1 + \lambda\gamma_0(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_0) & \lambda\gamma_1(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_0) \\ \lambda\gamma_0(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_1) & 1 + \lambda\gamma_1(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_1) \\ \lambda\gamma_0(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_2) & \lambda\gamma_1(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_2) \\ \gamma_2(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}F) & 0 \\ \lambda\gamma_2(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_0) & B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_0 \\ \lambda\gamma_2(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_1) & B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_1 \\ 1 + \lambda\gamma_2(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_2) & B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.13. Пусть λ выбрано так, что

(1) $l(l+1) - \lambda \neq 0, l \geq 0$,

(2) $\Delta(\lambda) \neq 0$.

Тогда существует резольвента $(B_\gamma - \lambda I)^{-1}$, которая определяется по формуле

$$(B_\gamma - \lambda I)^{-1}F = (B_0 - \lambda I)^{-1}F(x) - \frac{H(x; \lambda; F)}{\Delta(\lambda)}. \quad (1.13)$$

Теорема 1.13 доказывается также как доказана теорема 2 в работе [6]. Из представления (1.13) вытекает, что резольвента является мероморфной функцией от λ .

В заключении данного пункта приведём пример вычисления резольвенты. Пусть $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv 0, \gamma_0(F) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varepsilon(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) F(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$. В этом случае краевая задача (1.7) примет вид

$$\begin{aligned} -\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \hat{h}(\theta, \varphi) &= F(\theta, \varphi), (\theta, \varphi) \neq (\theta_0, \varphi_0), (\theta, \varphi) \neq (\pi - \theta_0, \pi + \varphi_0), \\ U_0(\hat{h}) &= \hat{g}(\theta_0, \varphi_0), U_1(\hat{h}) = 0, U_2(\hat{h}) = 0, \\ U_3(\hat{h}) &= 0, U_4(\hat{h}) = 0, U_5(\hat{h}) = 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $\hat{g}(\theta, \varphi) = (B_0^{-1}F)(\theta, \varphi)$ - регуляризация элемента $\hat{h}(\theta, \varphi)$ из $W_{2,U}^2(S_0^2)$. Резольвента оператора $B_{\alpha_0 00000}$ соответствующая краевой задаче (1.14) примет вид

$$\begin{aligned} (B_{\gamma_0 00000} - \lambda I)^{-1}F(x) &= (B_0 - \lambda I)^{-1}F(x) - \\ &- \frac{\gamma_0(B_0(B_0 - \lambda I)^{-1}F) \cdot (\psi_0(x) + \lambda(B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_0(x))}{1 + \lambda\gamma_0(\psi_0) + \lambda^2\gamma_0((B_0 - \lambda I)^{-1}\psi_0(x))}. \end{aligned}$$

При $\lambda = 0$ получим формулу для решения краевой задачи (1.14)

$$h(x) = B_0^{-1}F(x) - \gamma_0(F)\psi_0(x), x \in S_0^2.$$

В данной работе исследованы дельтаобразные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами на римановом многообразии без края. В качестве риманова многообразия в данном пункте выступает двумерная сфера из $\mathbb{R}^3$. Аналогичные построения могут быть проделаны для оператора Лапласа-Бельтрами на гладких многообразиях без края. Другие возможности связаны с описанием корректных сужений линейных дифференциальных операторов на гладких многообразиях с краем. Наконец, интересна проблема описания корректных задач для эллиптических дифференциальных операторов производных порядков на многообразиях с границей, состоящих из компонент различной размерности.

1.5 О функции Грина возмущённого оператора Лапласа-Бельтрами с конечным числом проколотых точек на двумерной сфере

Произвольное конечное число точек удаляется из трёхмерного евклидова пространства на двумерной сфере. Приведены корректные краевые задачи для соответствующего оператора Лапласа-Бельтрами на проколотой сфере. Для постановки корректных задач предварительно подробно изучаются некоторые свойства функции Грина оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере. Представлена функция Грина оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере с конечным числом проколотых точек.

Метод функции Грина во многих случаях оказался удобным инструментом для исследования свойств физических систем. Это обстоятельство связано с тем, что при помощи функции Грина можно определить фактически все основные физические характеристики системы. Поскольку возможность явных представлений функции Грина представляют актуальную проблему.

В данной работе приведены явные формулы функции Грина для некоторых сингулярных возмущении оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере. Заметим, что $\varepsilon(x, t)$ - функция Грина оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере достаточно хорошо изучена. При удалении из двумерной сферы конечного числа точек $x_1, \dots, x_N$, единственность решения неоднородного уравнения Лапласа-Бельтрами нарушается. Поскольку функции $\varepsilon(x, x_1), \dots, \varepsilon(x, x_N)$ представляют ненулевые решения однородного уравнения Лапласа-Бельтрами в проколотой в N точках двумерной сфере.

Таким образом, для однозначного разрешения неоднородного уравнения Лапласа-Бельтрами в проколотой в N точках двумерной сфере надо потребовать

выполнения некоторого количества дополнительных условий, которые можно интерпретировать в качестве граничных условий. В качестве границы, проколотой в N точках двумерной сферы, выступают точки $x_1, \dots, x_N$. При этом возникает вопрос: сколько дополнительных граничных условий надо добавить для однозначной разрешимости? При этом важно также конкретное описание подобных граничных условий. В результате описания требуемых граничных условий возникает однозначно всюду разрешимые граничные задачи для оператора Лапласа-Бельтрами в проколотой в N точках двумерной сфере. Основная цель данного пункта - выразить функцию Грина, полученной граничной задачи, через функцию Грина оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере (без проколов).

Отметим некоторые работы, которые близки по методам исследования данной работы. В работе [21] исследуется спектр оператора Лапласа в ограниченной односвязной области с нулевым условием Дирихле на границе при дельтаобразных возмущениях оператора во внутренней точке области. В [28] рассмотрен класс корректных задач для уравнения Пуассона в проколотой области. Исследованы свойства функции Грина приведённых в работе задач. В работах [4], [29], [30] даны полные описания корректно разрешимых краевых задач для оператора Лапласа на круге и в проколотом круге. В отличие от указанных работ, в данной работе функция Грина оператора Лапласа-Бельтрами на гладком римановом многообразии выписана в явном виде.

Пусть S^2 - двумерная сфера евклидова пространства R^3 . Выберем [30] фиксированный обратимый самосопряжённый оператор Лапласа-Бельтрами $B_0 = B_0^* = I - \Delta_{S^2}$ действующий в гильбертовом пространстве $L_2(S^2)$. Область определения этого оператора обозначается как $W_2^2(S^2) \subset L_2(S^2)$.

Известно [30], что собственные значения оператора B_0 вычисляются по формулам $\lambda_l = 1 + l(l + 1), l \geq 0$. Так как все $\lambda_l \geq 1$, то существует обратный оператор B_0^{-1} , который является интегралом $B_0^{-1}f(x) = \int_{S^2} \varepsilon(x, t)f(t)ds_t$. Ядро интегрального оператора $\varepsilon(x, t)$ определяет функцию Грина оператора B_0 .

Функция Грина $\varepsilon(x, t)$ как функция x при $x \neq t$ удовлетворяет равенству $(I - \Delta_{S^2})\varepsilon(x, t) = 0$, которое следует из определения обратного оператора B_0^{-1} . Легко видеть, что частные производные $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t_1}(x, t), \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_2}(x, t)$ также удовлетворяют равенствам для $x \neq t$

$$(I - \Delta_{S^2}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_1}(x, t) = 0,$$

$$(I - \Delta_{S^2}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_2}(x, t) = 0.$$

Известно [30], что собственными значениями оператора B_0 могут быть только числа $\lambda_l = 1 + l(l + 1)$, где $l \geq 0$ являются интегралами. Собственные функции оператора B_0 , соответствующие оператору, задаются формулой

$$\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_{lm}(\cos \theta) \cos m\varphi, m = 0, \dots, l \\ P_{l|m|}(\cos \theta) \sin|m|\varphi, m = -1, -2, \dots, -l, \end{cases}$$

где $P_{lm}(\cos \theta)$ представляет ассоциированные функции Лежандра. Заметим [26], что собственные функции оператора B_0 обладают свойством

$$\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi) = \hat{Y}_{lm}(\pi - \theta, \pi + \varphi). \quad (1.15)$$

Для проверки требуемого равенства достаточно проверить, что четность ассоциированных функций Лежандра $P_{lm}(t)$ совпадает с четностью $l + |m|$.

Известно [30], что система собственных функций оператора B_0 является ортогональным базисом в функциональном пространстве $L_2(S^2)$.

Заметим, что выполняются следующие равенства

$$(Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi))_{S^2} = \begin{cases} \frac{4\pi}{2l+1}, m = 0 \\ \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \frac{2\pi}{2l+1}, 1 \leq |m| \leq l. \end{cases}$$

Известно [31], что функция Грина $\varepsilon(x, t)$ разлагается по собственным функциям оператора B_0 . Функция Грина $\varepsilon(x, t)$ по формуле имеет следующий вид

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{1 + l(l + 1)} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(x) Y_{lm}(t)}{\frac{2\pi}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}}. \quad (1.16)$$

Ниже приведены свойства функции Грина, описанные в работе [32].

Лемма 1.14. Функция $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$ при $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ имеет представление

$$\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\omega \frac{1}{\sqrt{2 \cos t - \cos \omega}} \left(\cos \frac{t}{2} \ln \frac{1}{2(1 - \cos t)} - \kappa(t) \right) dt,$$

где $\cos \omega = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos(\varphi - \beta)$, $\kappa(t) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi]$.

В монографии [30] даётся асимптотическое представление для полинома Лежандра при $l \rightarrow \infty$

$$P_l(\cos \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi l \sin \omega}} \sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{\pi}{4} \right] + r_l(\omega), \quad (1.17)$$

здесь $0 < \delta \leq \omega \leq \pi - \delta$. Заметим, что $r_l(\omega) = \frac{q_l(\omega)}{l}$ и $|q_l(\omega)| < c$ равномерно по всему замкнутому интервалу $[\delta, \pi - \delta]$. Используя указанное асимптотическое представление (1.17), находим свойства гладкости функций Грина $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$.

Для дальнейших целей удобно ввести следующие две функции

$$K_1(\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{(1+l(l+1))\sqrt{l}} \sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{\pi}{4} \right],$$

$$K_2(\omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{(1+l(l+1))l} q_l(\omega).$$

Лемма 1.15. Пусть δ - произвольное положительное число. Тогда функция Грина $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$ имеет следующее представление для $\delta < \omega < \pi - \delta$

$$\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \omega}} K_1(\omega) + K_2(\omega). \quad (1.18)$$

Здесь $\cos \omega = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos(\varphi - \beta)$. Это представление (1.18) показывает, что функция не принадлежит пространству $L_2(S^2)$.

Замечание 1.16. Функции $K_1(\omega), K_2(\omega)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями на отрезке $(0, \pi)$.

Замечание 1.17. Согласно лемме 1.15, функция Грина $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$ определяется по формуле (1.18) для $\omega \in (0, \pi)$ и, принимая во внимание Замечание 1.16, представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию от ω на интервале $(0, \pi)$.

Замечание 1.18. Из представления (1.18) следует, что функция Грина $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$ имеет особенности при $\sin \omega = 0$. В то же время, $\sin \omega = 0$, при $\omega = 0$ и $\omega = \pi$. Таким образом, функция Грина $\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi; \alpha, \beta)$ имеет две особенности в точках $(\theta, \varphi) = (\alpha, \beta)$ и $(\theta, \varphi) = (\pi - \alpha, \pi + \beta)$. В самом деле, из соотношения $\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi) = \hat{Y}_{lm}(\pi - \theta, \pi + \varphi)$ следует, что

$$\hat{\varepsilon}(\theta, \varphi, \alpha, \beta) = \hat{\varepsilon}(\pi - \theta, \pi + \varphi, \alpha, \beta) = \hat{\varepsilon}(\theta, \varphi, \pi - \alpha, \pi + \beta).$$

1.6 Дельтаобразные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами

В этом разделе мы сформулируем новые коррелятивно разрешимые задачи для оператора $(I - \Delta_{S^2})$ на проколотой сфере $S_0^2 = S^2 \setminus \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0\}$. Здесь $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0\}$ являются фиксированными точками из S^2 . Для $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0\} \subset S^2$ существует конечное множество элементов $\{\psi_{0j}(x), \psi_{1j}(x), \psi_{2j}(x)\}$ при $j = 1, \dots, N$ определяющееся следующим образом

$$\begin{aligned}\psi_{01}(x) &= \varepsilon(x, t)|_{t=x_1^0}, \psi_{11}(x) = \frac{\partial}{\partial t_1} \varepsilon(x, t)|_{t=x_1^0}, \psi_{21}(x) = \frac{\partial}{\partial t_2} \varepsilon(x, t)|_{t=x_1^0}, \\ \psi_{02}(x) &= \varepsilon(x, t)|_{t=x_2^0}, \psi_{12}(x) = \frac{\partial}{\partial t_1} \varepsilon(x, t)|_{t=x_2^0}, \psi_{22}(x) = \frac{\partial}{\partial t_2} \varepsilon(x, t)|_{t=x_2^0}, \\ \psi_{0n}(x) &= \varepsilon(x, t)|_{t=x_n^0}, \psi_{1n}(x) = \frac{\partial}{\partial t_1} \varepsilon(x, t)|_{t=x_n^0}, \psi_{2n}(x) = \frac{\partial}{\partial t_2} \varepsilon(x, t)|_{t=x_n^0},\end{aligned}$$

при $x \in S_0^2$. Набор элементов $\{\psi_{0j}(x), \psi_{1j}(x), \psi_{2j}(x), j = \overline{1, n}\}$ не принадлежит пространству $L_2(S^2)$, т.е. $\psi_{0j}(x), \psi_{1j}(x), \psi_{2j}(x) \notin L_2(S^2)$, и тем более не принадлежит пространству $W_2^2(S^2)$. Построим биортогональные функционалы к системе функции $\{\psi_{0j}(x), \psi_{1j}(x), \psi_{2j}(x), j = \overline{1, n}\}$ и обозначим их как $\{U_{0j}, U_{1j}, U_{2j}\}$.

Нам также удобно ввести набор линейных функционалов следуя работе [32] $\{U_{0j}, U_{1j}, U_{2j}\}$:

$$\begin{aligned}U_{0j}(\hat{h}) &= \sin \theta_{0j} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\varphi_{0j}-\delta}^{\varphi_{0j}+\delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\theta_{0j}-\delta, \beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial \hat{h}(\theta_{0j}+\delta, \beta)}{\partial \alpha} \right) d\beta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\theta_{0j}-\delta}^{\theta_{0j}+\delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\alpha, \varphi_{0j}-\delta)}{\partial \beta} - \frac{\partial \hat{h}(\alpha, \varphi_{0j}+\delta)}{\partial \beta} \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right] + \\ &+ \sin \theta_{0j} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\pi+\varphi_{0j}-\delta}^{\pi+\varphi_{0j}+\delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\pi-\theta_{0j}-\delta, \beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial \hat{h}(\pi-\theta_{0j}+\delta, \beta)}{\partial \alpha} \right) d\beta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi-\theta_{0j}-\delta}^{\pi-\theta_{0j}+\delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\alpha, \pi+\varphi_{0j}-\delta)}{\partial \beta} - \frac{\partial \hat{h}(\alpha, \pi+\varphi_{0j}+\delta)}{\partial \beta} \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right], \\ U_{1j}(\hat{h}) &= \sin \theta_{0j} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\varphi_{0j}-\delta}^{\varphi_{0j}+\delta} \left(\hat{h}(\theta_{0j}+\delta, \beta) - \hat{h}(\theta_{0j}-\delta, \beta) \right) d\beta \right] + \\ &+ \sin \theta_{0j} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\pi+\varphi_{0j}-\delta}^{\pi+\varphi_{0j}+\delta} \left(\hat{h}(\pi-\theta_{0j}+\delta, \beta) - \hat{h}(\pi-\theta_{0j}-\delta, \beta) \right) d\beta \right],\end{aligned}$$

$$U_{2j}(\hat{h}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_{0j}-\delta}^{\theta_{0j}+\delta} \left(\hat{h}(\alpha, \varphi_{0j} + \delta) - \hat{h}(\alpha, \varphi_{0j} - \delta) \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right] + \\ + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\pi-\theta_{0j}-\delta}^{\pi-\theta_{0j}+\delta} \left(\hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_{0j} + \delta) - \hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_{0j} - \delta) \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right],$$

где $x_{0j} = (\theta_{0j}, \varphi_{0j}) \in S^2, j = 1, \dots, n$.

Следующей леммой [32] определяются соотношения между множествами $\{\psi_{0j}(x), \psi_{1j}(x), \psi_{2j}(x)\}$ и набор $\{U_{0j}, U_{1j}, U_{2j}\}$ при $j = \overline{1, n}$.

Лемма 1.19. Биортогональные соотношения справедливы для $k, m = 0, 1, 2, j, s = 1, \dots, n$:

$$U_{ks}(\psi_{mj}) = \delta_{ksmj},$$

где δ_{ksmj} является символом Кронекера и $\delta_{ksmj} = 1$, если $(ks) = (mj)$, и $\delta_{ksmj} = 0$, при $(ks) \neq (mj)$.

Известно [33], что введённые функционалы имеют физическую интерпретацию. В частности, функционал U_{0j} - предельное значение потенциала двойного слоя, а функционалы U_{1j}, U_{2j} - предельные значения потенциалов простого слоя.

Используя выбранные потенциалы, введём класс функций

$$W_{2,U}^2(S_0^2) = \{h(x) \in W_{2,loc}^2(S_0^2) : \exists \{U_{01}(h), U_{11}(h), U_{12}(h)\}, \\ \{U_{02}(h), U_{12}(h), U_{22}(h)\}, \dots, \{U_{0n}(h), U_{1n}(h), U_{2n}(h)\} \text{ конечные значения} \}.$$

Лемма 1.20. Пусть $h(t)$ - произвольный элемент класса $W_{2,U}^2(S_0^2)$. Тогда функция $h(x)$ представляется следующим образом

$$h(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \left(\alpha_{0j} \psi_{0j}(x) - \alpha_{1j} \psi_{1j}(x) - \alpha_{2j} \psi_{2j}(x) \right), \quad (1.19)$$

где $g(x)$ есть некоторая гладкая функция пространства $W_2^2(S^2)$, $\alpha_{0j}, \alpha_{1j}, \alpha_{2j}$ - некоторые комплексные числа. Более того, представление (1.19) единственно.

Лемма 1.19 и Лемма 1.20 доказаны в [32].

Согласно Лемме 1.20 введём оператор J . Оператор J отображает произвольный элемент $h \in W_{2,U}^2(S_0^2)$ на элемент $g \in W_2^2(S^2)$, т.е. $g(x) = Jh(x)$. Точно так же согласно Лемме 3.2 вводятся линейные функционалы $\alpha_k(h), k = 0, 1, 2$.

В [32] доказана следующая теорема.

Теорема 1.21. Пусть $\gamma_{01}, \gamma_{11}, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{0n}, \gamma_{1n}, \gamma_{2n}$ - произвольный набор линейных функционалов в пространстве $L_2(S^2)$. Тогда для любого $f \in L_2(S^2)$ следующая задача

$$B_0 J h(x) = f(x), x \in S_0^2, U_{kj}(h) = \gamma_{kj}(B_0 J h), k = 0, 1, 2 \quad (1.20)$$

имеет единственное решение класса $W_{2,U}^2(S_0^2)$. Оператор, соответствующий задаче (1.20), будет обозначаться B_γ .

Используя приведённое выше представление, функция $h(x)$ записывается в виде $h(x) = B_0^{-1}F - \sum_{j=1}^n (\gamma_{0j}(F)\psi_{0j}(x) + \gamma_{1j}(F)\psi_{1j}(x) + \gamma_{2j}(F)\psi_{2j}(x))$.

Поскольку γ_{kj} - линейный непрерывный функционал над $L_2(S^2)$, теорема Рисса позволяет записать интегральное представление

$$\gamma_{kj}(f) = \sum_{j=1}^n \int_{S^2} \sigma_{kj}(t) f(t) ds_t^2, \quad (1.21)$$

где $\sigma_{kj} \in L_2(S^2)$.

Используя указанные выше свойства, можно записать функцию Грина оператора B_γ :

$$\varepsilon_\gamma(x, t) = \varepsilon(x, t) - \sum_{j=1}^n (\sigma_{0j}(t)\psi_{0j}(x) + \sigma_{1j}(t)\psi_{1j}(x) + \sigma_{2j}(t)\psi_{2j}(x)).$$

В данном пункте введена функция Грина возмущённого оператора Лапласа-Бельтрами, определённого на двумерной сфере. Даны описания линейных функционалов для произвольной точки из проколотой сферы. Приведены выражения функции Грина $\varepsilon_\gamma(x, t)$ через $\varepsilon(x, t)$.

2 ОДНОЗНАЧНО РАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА СФЕРЕ, ПРОКОЛОТОЙ С ПОМОЩЬЮ КРИВОЙ

Из двумерной сферы трёхмерного пространства удаляется фиксированная гладкая дуга. На полученной поверхности изучается оператор Лапласа-Бельтрами. В работе найдены граничные условия на удалённой дуге, которые гарантируют существование единственного решения неоднородного уравнения Лапласа-Бельтрами.

Известно [34], что двумерная сфера S в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ представляет риманово многообразие. На указанной сфере стандартным образом вводится Δ_S оператор Лапласа-Бельтрами. Поскольку сфера S является гладким многообразием без края, то корректна определена задача

$$u(x) - \Delta_S u(x) = f(x), x \in S.$$

В работах [34, 36] сфера S замкнутой кривой C разбивается на две непересекающиеся части S_1 и S_2 .

В работе [34] исследована следующая задача Дирихле

$$\begin{aligned} -\Delta_S u(x) &= 0, & x \in S_2, \\ u(x) &= g(x), & x \in C, \end{aligned}$$

где $g(x)$ – заданная непрерывная (или достаточно гладкая) функция, определённая на границе C области S_2 и задающая граничное значение решения.

Используя потенциалы простого и двойного слоя, доказано существование решения указанной задачи Дирихле.

В работе [36] изучена другая задача

$$-\Delta_S u(x) = \omega(x), x \in S_2 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}u(x) + \int_C u(y) \underline{curl}_S \varepsilon(x, y) \cdot \vec{t}(y) ds_y - \\ & - \int_C \varepsilon(x, y) \underline{curl}_S u(y) \cdot \vec{t}(y) ds_y = 0, x \in C, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\underline{curl}_S$ – это поверхностный оператор ротора (псевдовекторный дифференциальный оператор), действующий на функции, определённые на сфере S_2 , и характеризующий вихревую составляющую градиента на поверхности. А $\vec{t}(y)$ – это касательный единичный вектор в точке $y \in C$, направленный вдоль контура C и лежащий в касательной плоскости к сфере S_2 в этой точке.

Здесь $\varepsilon(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \ln |1 - \langle x, y \rangle|$ представляет фундаментальное решение оператора Лапласа-Бельтрами. В работе [36] показано, что решение задачи (2.1), (2.2) записывается в виде

$$u(x) = \int_{S_2} \varepsilon(x, y) \omega(y) d\sigma_y, x \in S_2.$$

Отметим также работу [37], где исследована краевая задача для оператора Лапласа-Бельтрами на проколотой сфере. Под проколотой сферой понимается сфера, из которой удалена одна точка. В таком случае возникает проблема: Каким дополнительным условиям должно удовлетворять решение в удалённой точке, чтобы гарантировать единственность решения?

В настоящей работе из сферы удаляется фиксированная дуга и изучается тот же вопрос: каким дополнительным условиям должно удовлетворять решение на удалённой дуге, чтобы гарантировать единственность такого решения?

2.1 Известные факты

Рассмотрим замкнутую кривую C на двумерной сфере S , которая делит S на две части S_1 и S_2 . В частности, кривая $C = \partial S_1$ является границей поверхности S_1 .

Введём некоторые векторные тождества на сфере. Пусть $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ обычные орты в сферических координатах. Согласно работе [34], определим поверхностный градиент скаляра f на S и поверхностную дивергенцию для вектор-функции $\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\varphi \vec{e}_\varphi + V_\theta \vec{e}_\theta$ на сфере по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \nabla_S f(x) &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta, \\ \operatorname{div}_S \vec{V}(x) &= \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} V_\varphi(\varphi, \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta(\varphi, \theta)) \right). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает тождество

$$\Delta_S u(x) = \operatorname{div}_S \nabla_S u(x).$$

Введём [34] векторное вращение поверхности для скалярного поля f на сфере

$$\underline{\text{curl}}_S f(x) = -\frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta$$

и (скалярное) вращение поверхности векторного поля $\vec{V}$ как

$$\text{curl}_S \vec{V}(x) = \frac{1}{\sin \theta} \left(-\frac{\partial}{\partial \varphi} V_\theta(\varphi, \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\varphi(\varphi, \theta)) \right).$$

В работе [34] приведено другое векторное тождество для оператора Лапласа-Бельтрами

$$\Delta_S u(x) = -\text{curl}_S \text{curl}_S u(x) \text{ для } x \in S.$$

В функциональном пространстве $L_2(S)$ введём скалярное произведение

$$\langle u, v \rangle_{L_2(S)} = \int_S u(x) v(x) d\sigma_x = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(x(\varphi, \theta)) v(x(\varphi, \theta)) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Теперь выведем тождество Грина. Интегрируя по частям скалярное произведение $\langle -\Delta_S u, v \rangle_{L_2(S)}$, получаем следующее представление

$$\langle -\Delta_S u, v \rangle_{L_2(S)} = a_S(u, v) = a_S(v, u) = \langle u, -\Delta_S v \rangle_{L_2(S)},$$

где введена симметричная билинейная форма

$$\begin{aligned} a_S(u, v) &:= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} u(\varphi, \theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} v(\varphi, \theta) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} v(\varphi, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} u(\varphi, \theta) \right] d\theta d\varphi \\ &= \int_S \nabla_S u(x) \cdot \nabla_S v(x) d\sigma_x. \end{aligned}$$

Теорема Стокса [35] для положительно ориентированной кривой C и области S_2 может быть записана как

$$\int_{S_2} \text{curl}_S \vec{V}(x) d\sigma_x = \int_C \vec{V}(x) \cdot \vec{t}(x) ds_x.$$

Здесь $\vec{t}$ - единичный касательный вектор к C . Заметим, что аналогичное тождество выполняется для области S_1 , но при этом меняется направление касательной. Теперь, устанавливая $\vec{V} = v(x) \vec{W}(x)$ и применяя правило

произведения, получаем $\int_{S_2} \text{curl}_S v(x) \cdot \vec{W}(x) d\sigma_x = - \int_C v(x) [\vec{W}(x) \cdot \vec{t}(x)] ds_x + \int_{S_2} v(x) \text{curl}_S \vec{W}(x) d\sigma_x$. Используя $\vec{W}(x) = \underline{\text{curl}}_S u(x)$, окончательно получим первую формулу Грина для оператора Лапласа-Бельтрами

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \underline{\text{curl}}_S v(x) \cdot \underline{\text{curl}}_S u(x) d\sigma_x &= \\ &= \int_{S_2} v(x) (-\Delta_S u(x)) d\sigma_x - \int_C v(x) [\underline{\text{curl}}_S u(x) \cdot \underline{t}(x)] ds_x. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В данной формуле роль билинейной формы $a_{S^2}(u, v)$ играет выражение $\int_{S_2} \underline{\text{curl}}_S v(x) \cdot \underline{\text{curl}}_S u(x) d\sigma_x$. Перепишем формулу (2.3), поменяв местами функции $u(x)$ и $v(x)$. В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \underline{\text{curl}}_S u(x) \cdot \underline{\text{curl}}_S v(x) d\sigma_x &= \\ &= \int_{S_2} u(x) (-\Delta_S v(x)) d\sigma_x - \int_C u(x) [\underline{\text{curl}}_S v(x) \cdot \underline{t}(x)] ds_x. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вычитая формулу (2.3) из формулы (2.4), получим вторую формулу Грина для оператора Лапласа-Бельтрами в виде

$$\begin{aligned} \int_{S_2} [u(x) \Delta_S v(x) - v(x) \Delta_S u(x)] d\sigma_x &= \\ &= \int_C [v(x) \underline{\text{curl}}_S u(x) - u(x) \underline{\text{curl}}_S v(x)] \cdot \vec{t}(x) ds_x. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В заключении данного пункта приведём введённые в работе [34] определения потенциалов простого и двойного слоя.

Потенциал простого слоя с достаточно гладкой функцией плотности σ определяется по формуле

$$(\tilde{V}\sigma)(x) := \int_C \varepsilon(x, y) \sigma(y) ds_y \quad \text{для } x \notin C.$$

Потенциал двойного слоя с достаточно гладкой функцией плотности μ задаётся по формуле

$$(\tilde{W}\mu)(x) := \int_C \mu(y) [\underline{\text{curl}}_S \varepsilon(x, y) \cdot \vec{t}(y)] ds_y \quad \text{для } x \notin C.$$

Введённые потенциалы обладают стандартными свойствами потенциалов простого и двойного слоя.

Для $x \notin C$ потенциал простого слоя удовлетворяет условию

$$\Delta_S(\tilde{V}\sigma)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_C \sigma(y) ds_y.$$

Аналогично потенциал двойного слоя удовлетворяет уравнению Лапласа-Бельтрами для $x \notin C$

$$\Delta_S(\tilde{W}\mu)(x) = 0,$$

без дополнительных ограничений на плотность μ , где W представляет собой оператор, порождающий потенциал двойного слоя, который является гармонической функцией (в смысле оператора Лапласа-Бельтрами) вне поверхности C .

2.2 Корректная постановка краевой задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на сфере с разрезом

Пусть $\delta > 0$. В данном пункте в качестве замкнутой кривой C выберем кривую C_δ на сфере S , которая показана на рисунке 1. Кривая C_δ делит сферу S на две части $S_{1\delta}$ и $S_{2\delta}$. На рисунке 1 поверхность $S_{2\delta}$ закрашена. Незакрашенная часть сферы S в $\mathbb{R}^3$ обозначена через $S_{1\delta}$.

Положим $S_{2\delta} = S \setminus \bar{S}_{1,\delta}$, а также обозначим через C_δ ее границу $S_{2\delta}$. Согласно [34], фундаментальное решение оператора Лапласа-Бельтрами Δ_S определяется выражением

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y) &= -\frac{1}{4\pi} \log |1 - (x, y)| \\ &= -\frac{1}{4\pi} \log [1 - \cos(\varphi_x - \varphi_y) \sin \theta \sin_x \theta_y - \cos \theta_x \cos \theta_y]. \end{aligned}$$

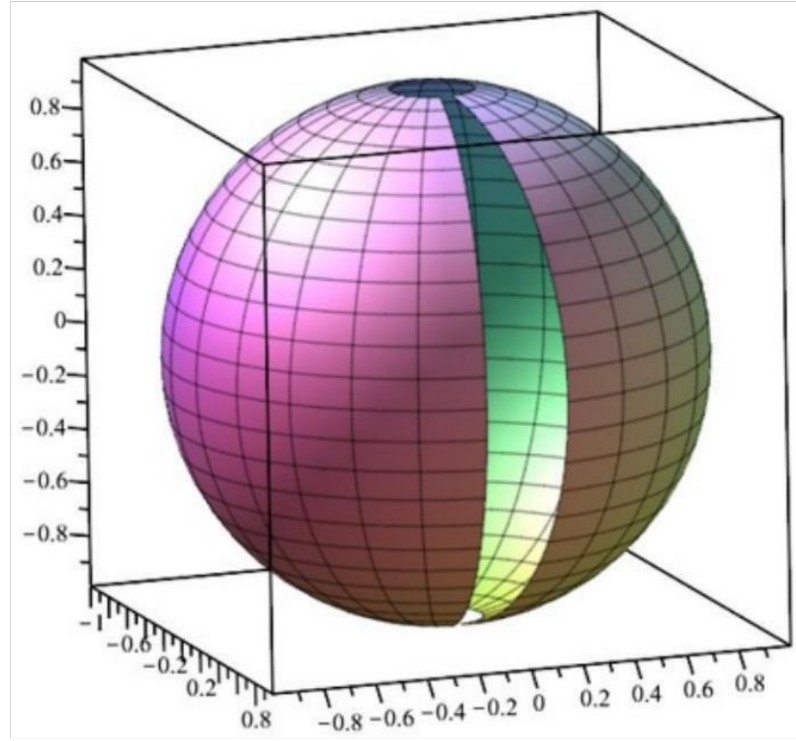


Рис.1. Двумерная сфера с замкнутой кривой, разбивающей ее на две части.

В частности, [34, 36],

$$\Delta_S \varepsilon(x, y) = \frac{1}{4\pi} + \delta(x - y)$$

для $x = x(\varphi, \theta), y = y(\varphi_0, \theta_0) \in S$. Здесь $\delta(x - y)$ является дельта-функцией Дирака.

Рассмотрим уравнение Лапласа - Бельтрами на поверхности $S_{2\delta}$ из S в $\mathbb{R}^3$. В дальнейшем через S_{20} будем обозначать $\lim_{\delta \rightarrow 0} S_{2\delta}$. Предельная поверхность S_{20} представляет сферу с разрезом вдоль дуги. Границу S_{20} обозначим через C_0 . Введем класс функции $W_{2,loc}^2(S_{20}) = \bigcup_{\delta > 0} W_2^2(S_{2\delta})$, и предполагая, что h принадлежит $W_{2,loc}^2(S_{20})$, непосредственным вычислением при любом $x \in S_{2\delta}$ находим

$$\begin{aligned} T(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{S_{2\delta}} \varepsilon(x, y) (-\Delta_S h(y)) d\sigma_y = \\ &= \int_{S_{2\delta}} h(y) (-\Delta_S \varepsilon(x, y)) d\sigma_y + \int_{C_\delta} h(y) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(x, y) t(y) ds_y - \\ &\quad - \int_{C_\delta} \varepsilon(x, y) \underline{\text{curl}}_S h(y) t(y) ds_y = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h(x) - \frac{1}{4\pi} \int_{S_{2\delta}} h(y) d\sigma_y + \int_{C_\delta} h(y) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(x, y) t(y) ds_y - \\
&\quad - \int_{C_\delta} \varepsilon(x, y) \underline{\text{curl}}_S h(y) t(y) ds_y,
\end{aligned}$$

где $t(y)$ - единичный касательный вектор к C_δ в точке y .

Из последнего соотношения имеем

$$\begin{aligned}
T(x) - h(x) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{S_{2\delta}} h(y) d\sigma_y + \\
&+ \int_{C_\delta} h(y) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(x, y) t(y) ds_y - \int_{C_\delta} \varepsilon(x, y) \underline{\text{curl}}_S h(y) t(y) ds_y.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

В дальнейшем считаем, что

$$\int_{S_{2\delta}} h(y) d\sigma_y = 0.$$

Тем самым из (2.6) находим

$$\begin{aligned}
T(x) - h(x) &= \int_{C_\delta} h(y) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(x, y) \vec{t}(y) ds_y - \\
&- \int_{C_\delta} \varepsilon(x, y) \underline{\text{curl}}_S h(y) \vec{t}(y) ds_y, \quad x \in S_{2\delta}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Соотношение (2.7) играет важную роль в наших рассуждениях. Для дальнейших целей нам потребуется вычисление предела правой части равенства (2.7), при $\delta \rightarrow 0$. Поэтому удобно ввести следующие линейные операторы по формулам

$$\begin{aligned}
(L_S h)(x) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \varepsilon(x, y) \underline{\text{curl}}_S h(y) \vec{t}(y) ds_y \quad \text{для } x \notin C_0, \\
(L_d h)(x) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} h(y) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(x, y) \vec{t}(y) ds_y \quad \text{для } x \notin C_0.
\end{aligned}$$

Заметим, что оператор L_S соответствует потенциалам простого слоя, а оператор L_d - потенциалам двойного слоя.

Приведём одно полезное свойство операторов L_d и L_S . Пусть $x_0 \in S_{20}$, то есть $x_0 \in C$. Обозначим через $\psi_1(y) = \varepsilon(x_0, y)$, $\vec{\Phi}(y) = \underline{\text{curl}}_S \psi(y)$. Вычислим значения $(L_S \psi_1)(x)$ и $(L_d \psi_1)(x)$ при $x \in S_{20}$. Для того чтобы вычислить указанные значения введём функцию

$$R(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{2\delta}} \varepsilon(x, y) (-\Delta_S \psi_1(y)) d\sigma_y.$$

Поскольку

$$-\Delta_S \psi_1(y) = -\Delta_S \varepsilon(x_0, y) = -\delta(x_0 - y) - \frac{1}{4\pi},$$

то

$$R(x) = -\varepsilon(x, x_0) - \frac{1}{4\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{2\delta}} \varepsilon(x, y) d\sigma_y.$$

Отсюда для любых $x, x_0 \in S_{20}$ вытекает соотношение

$$(L_d \psi_1)(x) - (L_s \psi_1)(x) = -2\varepsilon(x, x_0),$$

где $\psi_1(y) = \varepsilon(x_0, y), y \in S_{20}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & -\varepsilon(x, x_0) - \frac{1}{4\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{2\delta}} \varepsilon(x, y) d\sigma_y = \\ & = \varepsilon(x_0, x) - \frac{1}{4\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{2\delta}} \varepsilon(x, y) d\sigma_y + \\ & + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \psi_1(y) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(x, y) \vec{t}(y) ds_y - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \varepsilon(x, y) \underline{\text{curl}}_S \psi_1(y) \vec{t}(y) ds_y. \end{aligned}$$

Таким образом, разность $(L_d \psi_1 - L_s \psi_1)$ имеет особенность на C такого же характера, как и фундаментальное решение.

Напомним, что функции $g(x)$, которые удовлетворяют уравнению $\Delta_S g(x) = 0, x \in S_{20}$, называются гармоническими. Обозначим через $H(S_{20})$ класс гармонических функции на S_{20} , которые могут иметь особенность такого же характера как фундаментальное решение $\varepsilon(x, y)$.

Также нам необходимо ввести класс функции

$$\begin{aligned} W_{2L}^2(S_{20}) = & \left\{ h \in W_{2,loc}^2(S_{20}) : \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{20}} h(y) d\sigma_y = 0 \right. \\ & \left. (L_d h)(x) - (L_s h)(x) \in H(S_{20}), \Delta_S h \in L_2(S) \right\}. \end{aligned}$$

Возьмём произвольную функцию $h(x)$ из класса $W_{2L}^2(S_{20})$. Так как $\Delta_S h \in L_2(S)$, то $T(x) \in W_2^2(S)$ и $\Delta_S T = \Delta_S h$. Таким образом, $T(x)$ представляет регуляризацию функции $h(x)$. На самом деле, функция $h(x)$ могла иметь особенности на кривой C . В то же время её регуляризация $T(x)$ уже не имеет особенностей на полной сфере S , то есть принадлежит пространству $W_2^2(S)$.

В частности, справедливо утверждение.

Лемма 2.1. Произвольный элемент h класса $W_{2L}^2(S_{20})$ при $x \in S_{20}$ представим в виде $h(x) = T(x) + (L_S h)(x) - (L_d h)(x)$, где $T(x)$ - некоторая функция из $W_2^2(S)$.

Теперь можно сформулировать утверждение следующей теоремы.

Теорема 2.2. Для любой функции $f \in L_2(S)$ и любой функции g из $H(S_{20})$ задача

$$\begin{aligned} -\Delta_S u(x) &= f(x), x \in S_{20}, \\ (L_d u)(x) - (L_S u)(x) &= g(x), x \in S_{20} \end{aligned}$$

имеет единственное решение в классе $W_{2L}^2(S_{20})$. Утверждения, подобные лемме 2.1 и теореме 2.2 доказаны в работе [36].

Из теоремы 2.2 вытекает основное утверждение настоящей работы.

Теорема 2.3. Пусть K - линейный непрерывный оператор из пространства $L_2(S)$ в пространство $H(S_{20})$. Тогда при любом f из $L_2(S)$ следующая задача

$$-\Delta_S u(x) = f(x), x \in S_{20} \quad (2.8)$$

$$(L_d u)(x) - (L_S u)(x) = K(-\Delta_S u(x)), x \in S_{20} \quad (2.9)$$

имеет единственное решение из класса $W_{2L}^2(S_{20})$. Доказательство теоремы 2.3 повторяет рассуждения, которые приведены при доказательстве аналогичной теоремы из работы [36].

Наконец отметим, что условия (2.9) при $x \in S_{20}$ можно переписать при $x_0 \in C$ в виде граничных условий

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S_{20}}} ((L_d u)(x) - (L_S u)(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in S_{20}} K(-\Delta_S u(x)).$$

В заключении приведём пример. В качестве оператора K возьмём следующий оператор

$$Kf(x) = \int_S f(\tau)g(\tau)d\sigma_\tau \cdot \int_C \varepsilon(x, \tau)p(\tau)d\sigma_\tau,$$

где фиксированная функция $g \in L_2(S)$, $p(\tau)$ - некоторый многочлен на дуге C . В таком случае задача (2.8), (2.9) эквивалентна краевой задаче на S_{20}

$$\begin{aligned} -\Delta_S u(x) &= f(x), \quad x \in S_{20}, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in S_{20}}} ((L_d u)(x) - (L_S u)(x)) &= \\ &= \int_C \varepsilon(x_0, \tau) p(\tau) d\sigma_\tau \cdot \int_S g(\tau) (-\Delta_S u(\tau)) d\sigma_\tau. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Если $g(\tau)$ представляет гармоническую функцию на S , то граничное условие (2.10) может быть записано в более удобном виде. Для этого надо воспользоваться формулой

$$\int_S g(\tau) (-\Delta_S u(\tau)) d\sigma_\tau = \int_C g(y) \underline{\text{curl}}_S u(y) \cdot \vec{t}(y) ds_y - \int_C u(y) \underline{\text{curl}}_S g(y) \vec{t}(y) ds_y.$$

3 КОРРЕКТНО РАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ С РАЗРЕЗОМ

На трёхмерной сфере из четырёхмерного пространства удалена окружность. Требуется на полученной области описать корректно-разрешимые задачи для уравнения Лапласа-Бельтрами. В данном разделе обсуждается класс таких задач для уравнения Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере с разрезом вдоль окружности.

3.1 Основные понятия

Оператор Лапласа-Бельтрами определён на любом гладком многообразии M^n . Если многообразие M^n компактно, то оператор Лапласа-Бельтрами имеет чисто дискретный спектр [39]. В частности, указанным свойством обладает оператор Лапласа-Бельтрами, определённый на сфере S [40].

Если оператор Лапласа-Бельтрами рассматривается на полусфере $S_+^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: |x| = 1, x_{n+1} > 0\}$, то на границе полусферы надо дополнительно задавать граничные условия в виде условий Дирихле или Неймана [40]. В этом случае $C = \partial S_+^n$ граница полусферы представляет замкнутую гиперповерхность, которая делит S^n на две связанные части S_+^n и S_-^n . В работе [41] на сфере S^2 в $\mathbb{R}^3$ рассмотрена замкнутая кривая C , которая делит S^2 на две непересекающиеся связанные компоненты S_1 и S_2 . Используя аналоги потенциалов простого и двойного слоёв, в работе [41] решена следующая задача Дирихле для оператора Лапласа-Бельтрами на связной части сферы S^2 :

$$-\Delta_{S^2} u = 0 \text{ в } S_2 \text{ и } u = g \text{ на } C.$$

Отметим также работу [36], в которой на области S_2 поставлена следующая нелокальная краевая задача

$$\begin{aligned} -\Delta_{S^2} u &= f(x), \forall x \in S_2 \\ -\frac{u(x)}{2} + \int_C u(y) \operatorname{curl}_S \varepsilon(x, y) t(y) dS_y - \int_C \varepsilon(x, y) \operatorname{curl}_S u(y) t(y) dS_y &= 0, x \in C. \end{aligned}$$

Напомним, что величины curl_S , $\varepsilon(x, y)$ и $t(y)$ определены в работе [41]. В работе [36] доказана однозначная разрешимость вышеуказанной нелокальной краевой задачи.

В работах [36, 41] на сфере S^2 из $\mathbb{R}^3$ выбиралась замкнутая кривая C , которая разбивала S^2 на две непересекающиеся части S_1 и S_2 . Если в качестве C выбрать множество размерности нуль, к примеру, C может состоять из одной

точки $x_0 \in S^2$. Тогда удаление из S^2 этой точки приводит к проколотой области $S^2 \setminus \{x_0\}$. В работе [37] приведены корректно разрешимые задачи для оператора Лапласа-Бельтрами в проколотой области $S^2 \setminus \{x_0\}$. Если в качестве C выбрать незамкнутую кривую на S^2 , то примеры всюду разрешимых краевых задач для оператора Лапласа-Бельтрами в области $S^2 \setminus C$ можно найти в работе [37].

В данном пункте рассматривается сфера S^3 в $\mathbb{R}^4$. Теперь многообразие C на сфере S^3 можно выбрать четырьмя существенно различными способами:

- C - многообразие размерности нуль;
- C - многообразие размерности один;
- C - замкнутое многообразие размерности два;
- C - незамкнутое многообразие размерности два.

Наиболее интересен случай, когда $\dim C = 1$. Другие случаи уже встречались на S^2 и они исследовались в работах [36, 37, 41].

Итак, рассмотрим сферу $S^3 = \{(x, y, z, w): x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ в $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w): x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$. В качестве многообразия C возьмём окружность:

$$C = \left\{ (x, y, z, w): x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{2}, w = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Постановка задачи: описать всюду разрешимые краевые задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на сфере S^3 , из которой удалена замкнутая кривая C .

Чтобы сформулировать ответ на поставленную задачу необходимы следующие обозначения и факты.

Удобно ввести класс функций

$$W_{2,loc}^2(S_c^3) = \bigcup_{\delta > 0} W_2^2(S^3 \setminus P_c(\delta)),$$

где $W_2^2(\Omega)$ - пространство С.Л. Соболева на области $\Omega \subset S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Смысл обозначения $P_c(\delta)$ можно найти в пункте 1.3. Также необходимо определить следующий класс функции

$$W_{2,K}^2(S_c^3) = \{z \in W_{2,loc}^2(S_c^3): K_i z \in L_2(0, 2\pi), i = 1, 2, 3, \int_{S^3} z dV = 0\}.$$

Здесь фигурируют операторы K_1, K_2, K_3 , которые аккуратно определены в пункте 3.4 настоящей работы.

Структуру элементов пространства $W_{2,K}^2(S_c^3)$ проясняет следующее утверждение леммы.

Лемма 3.1. Для любой функций $z \in W_{2,K}^2(S_c^3)$ справедливо представление

$$\begin{aligned}
z(\psi', \theta', \varphi', \psi, \theta, \varphi) = & T(\psi', \theta', \varphi') - \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} G\left(\psi', \theta', \varphi', \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi\right) (K_1 z)(\varphi) d\varphi - \\
& - \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G\left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)}{\partial \psi} (K_2 z)(\varphi) d\varphi + \\
& + \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G\left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)}{\partial \theta} (K_3 z)(\varphi) d\varphi,
\end{aligned}$$

где $T \in W_2^2(S^3)$.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 3.2. Пусть при $i = 1, 2, 3$ гладкие функции $\forall \alpha_i \in W_2^2\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^2\right)$ удовлетворяют требованиям

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial \alpha_i}{\partial \psi} \right) \cos \psi \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta} \right) \right) d\psi d\theta = 0.$$

Тогда для $\forall f \in L_2(S^3)$ краевая задача

$$B_{\max} z = f(x), x \in S^3 \setminus C, \quad (3.1)$$

$$(K_i z)(\varphi) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha_i \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 Jz}{\partial \varphi^2} d\psi d\theta, i = 1, 2, 3, 0 < \varphi < 2\pi \quad (3.2)$$

имеет единственное решение в пространстве $W_{2,K}^2(S_c^3)$. Заметим, что задачу (3.1)-(3.2) можно записать в виде

$$\Delta_{S^3} u(x) + q(x)u(x) = f(x), x \in S^3,$$

где Δ_{S^3} - оператор Лапласа-Бельтрами на сфере S^3 , $q(x) = \delta_c(x)$ - дельта-функция, сосредоточенная на кривой C . Дельтаобразные возмущения оператора Лапласа на стандартных областях с разных точек зрения изучались в работах [7], [13], [42], [47].

3.2 Оператор Лапласа-Бельтрами на трехмерной сфере

Известно [43], что Δ_S оператор Лапласа-Бельтрами на трехмерной сфере определяется через Δ обычный оператор Лапласа в $\mathbb{R}^4$. Точнее говоря, верно представление

$$\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^3},$$

где Δ_S применяется на единичной сфере с последующим продолжением по нулевой однородности.

Напомним некоторые векторные тождества на сфере S^3 . Если $u(\vec{x}) = u(x, y, z, w)$ - некоторая функция в R^4 , то через $\hat{u}(r, \psi, \theta, \varphi)$ будем обозначать выражение $u(\vec{x})$ в сферической системе

$$\begin{aligned} \hat{u}(r, \psi, \theta, \varphi) = \\ = u(r \cos \varphi \cos \psi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \psi \cos \theta, r \cos \psi \sin \theta, r \sin \psi). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Пусть $\vec{e}_r, \vec{e}_\psi, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ - обычные орты в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \cos \theta \\ z = r \cos \psi \sin \theta \\ w = r \sin \psi. \end{cases}$$

Тогда столбцы матрицы Якоби примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \psi \cos \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \sin \psi \cos \theta \\ -r \sin \varphi \sin \psi \cos \theta \\ -r \sin \psi \sin \theta \\ r \cos \psi \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \cos \psi \sin \theta \\ -r \sin \varphi \cos \psi \sin \theta \\ r \cos \psi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \cos \psi \cos \theta \\ -r \cos \varphi \cos \psi \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Их скалярные произведения легко вычисляются следующим образом

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle &= 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\rangle = 0, \\
\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right\rangle &= 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \psi}, \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\rangle = 0. \\
E^1 &= \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\rangle = 1, \quad E^2 = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \psi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right\rangle = r^2, \\
E^3 &= \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle = r^2 \cos^2 \psi, \quad E^4 = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\rangle = r^2 \cos^2 \psi \cos^2 \theta.
\end{aligned}$$

Тогда ортонормированный базис из касательных векторов примет вид

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\cos \varphi \cos \psi \cos \theta, \sin \varphi \cos \psi \cos \theta, \cos \psi \sin \theta, \sin \psi)^T, \\
\vec{e}_\psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = (-\cos \varphi \sin \psi \cos \theta, -\sin \varphi \sin \psi \cos \theta, -\sin \psi \sin \theta, \cos \psi)^T, \\
\vec{e}_\theta &= \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \theta, 0)^T, \\
\vec{e}_\varphi &= \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0, 0)^T.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Легко видеть, что эти векторы - единичные касательные векторы соответственно к координатным линиям

$$\begin{aligned}
\psi, \theta, \varphi &= \text{const}, r, \theta, \varphi = \text{const} \\
r, \psi, \varphi &= \text{const}, r, \theta, \psi = \text{const}.
\end{aligned}$$

Разложим вектор $\vec{E}$ по ортонормированному базису

$$\vec{E} = E^r \vec{e}_r + E^\psi \vec{e}_\psi + E^\theta \vec{e}_\theta + E^\varphi \vec{e}_\varphi,$$

$\{E^r, E^\psi, E^\theta, E^\varphi\}$ - координаты $\vec{E}$ или координаты вектора $\vec{E}$ в сферической системе. В силу ортонормированности репера (3.4)

$$\begin{aligned}
E^r &= (\vec{E}, \vec{e}_r) = \\
&\hat{E}^1 \cos \varphi \cos \psi \cos \theta + \hat{E}^2 \sin \varphi \cos \psi \cos \theta + \hat{E}^3 \cos \psi \sin \theta + \hat{E}^4 \sin \psi, \\
E^\psi &= (\vec{E}, \vec{e}_\psi) = \\
&-\hat{E}^1 \cos \varphi \sin \psi \cos \theta - \hat{E}^2 \sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \hat{E}^3 \sin \psi \sin \theta + \hat{E}^4 \cos \psi, \\
E^\theta &= (\vec{E}, \vec{e}_\theta) = -\hat{E}^1 \cos \varphi \sin \theta - \hat{E}^2 \sin \varphi \sin \theta + \hat{E}^3 \cos \theta, \\
E^\varphi &= (\vec{E}, \vec{e}_\varphi) = -\hat{E}^1 \sin \varphi + \hat{E}^2 \cos \varphi,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где $\hat{E}_k$ - декартовы координаты E^k , выраженные как скалярные функции в сферической системе. Получим выражение координат вектора $\nabla u = \text{grad} u, u \in C^1(\mathbb{R}^4)$, в сферической системе. Дифференцируя (3.3) последовательно по r, θ, φ и ψ , имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} \cos \varphi \cos \psi \cos \theta + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} \sin \varphi \cos \psi \cos \theta + \\ &\quad + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_3} \cos \psi \sin \theta + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_4} \sin \psi, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \psi} &= -\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} \cos \varphi \sin \psi \cos \theta - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} \sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \\ &\quad - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_3} \sin \psi \sin \theta + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_4} \cos \psi, \\ \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} \cos \varphi \sin \theta - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} \sin \varphi \sin \theta + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_3} \cos \theta, \\ \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} \sin \varphi + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} \cos \varphi.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Поскольку $\left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \frac{\partial u}{\partial x_4} \right\}$ - координаты ∇u в декартовой системе, в силу (3.5) и (3.6) получим

$$\begin{aligned}(\nabla u)^r &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial r}, (\nabla u)^\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \psi} \\ (\nabla u)^\theta &= \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta}, (\nabla u)^\varphi = \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Выразим $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_3}$, и $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_4}$, где u - произвольная гладкая функция в S^3 , через $\frac{\partial \hat{u}}{\partial r}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial \psi}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi}$. Это легко сделать, рассматривая соотношения (3.6) как систему линейных уравнений относительно величин $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_3}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_4}$. Учитывая то, что матрица такой системы - ортогональная матрица, а обратная к ортогональной матрице является транспонированная к ней, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \cos \varphi \cos \psi \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \psi} \cos \varphi \sin \psi \cos \theta - \\ &\quad - \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} \cos \varphi \sin \theta - \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} \cos \varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_2} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \sin \varphi \cos \psi \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \psi} \sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \\
&\quad - \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} \sin \varphi \sin \theta + \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} \cos \varphi, \\
\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_3} &= \cos \psi \sin \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \psi} \sin \psi \sin \theta + \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} \cos \theta, \\
\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_4} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \sin \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \psi} \cos \psi.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Пусть теперь $\vec{E}$ - гладкое векторное поле в S^3 . Получим выражение $\widehat{\operatorname{div} \vec{E}}$ в сферической системе, т.е. выражение этой функции через $E^r, E^\psi, E^\theta, E^\varphi$. Используя выражения (3.8), последовательно получаем (выполняя на последней стадии суммирование по столбцам и тождественные преобразования)

$$\begin{aligned}
\widehat{\operatorname{div} \vec{E}} &= \frac{\partial \hat{E}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{E}^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{E}^3}{\partial x_3} + \frac{\partial \hat{E}^4}{\partial x_4} = \\
&= \frac{\partial \hat{E}^1}{\partial r} \cos \varphi \cos \psi \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{E}^1}{\partial \psi} \cos \varphi \sin \psi \cos \theta - \\
&\quad - \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial \hat{E}^1}{\partial \theta} \cos \varphi \sin \theta - \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} \frac{\partial \hat{E}^1}{\partial \varphi} \sin \varphi + \\
&\quad + \frac{\partial \hat{E}^2}{\partial r} \sin \varphi \cos \psi \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{E}^2}{\partial \psi} \sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \\
&\quad - \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial \hat{E}^2}{\partial \theta} \sin \varphi \sin \theta + \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} \frac{\partial \hat{E}^2}{\partial \varphi} \cos \varphi + \\
&\quad + \frac{\partial \hat{E}^3}{\partial r} \cos \psi \sin \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{E}^3}{\partial \psi} \sin \psi \sin \theta + \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial \hat{E}^3}{\partial \theta} \cos \theta + \\
&\quad + \frac{\partial \hat{E}^4}{\partial r} \sin \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{E}^4}{\partial \psi} \cos \psi = \\
&= \frac{\partial}{\partial r} (\hat{E}^1 \cos \varphi \cos \psi \cos \theta + \hat{E}^2 \sin \varphi \cos \psi \cos \theta + \\
&\quad + \hat{E}^3 \cos \psi \sin \theta + \hat{E}^4 \sin \psi) + \\
&\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (-\hat{E}^1 \cos \varphi \sin \psi \cos \theta - \hat{E}^2 \sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \\
&\quad - \hat{E}^3 \sin \psi \sin \theta + \hat{E}^4 \cos \psi) + \\
&\quad + \frac{1}{r} (\hat{E}^1 \cos \varphi \cos \psi \cos \theta + \hat{E}^2 \sin \varphi \cos \psi \cos \theta + \\
&\quad + \hat{E}^3 \cos \psi \sin \theta + \hat{E}^4 \sin \psi) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial}{\partial \theta} (-\hat{E}^1 \cos \varphi \sin \theta - \hat{E}^2 \sin \varphi \sin \theta + \hat{E}^3 \cos \theta) + \\
& + \frac{1}{r \cos \psi} (\hat{E}^1 \cos \varphi \cos \theta + \hat{E}^2 \sin \varphi \cos \theta + \hat{E}^3 \sin \theta) + \\
& + \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (-\hat{E}^1 \sin \varphi + \hat{E}^2 \cos \varphi) + \\
& + \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} (\hat{E}^1 \cos \varphi + \hat{E}^2 \sin \varphi) = \\
& = \frac{\partial E^r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E^\psi}{\partial \psi} + \frac{E^r}{r} + \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial E^\theta}{\partial \theta} + \\
& + \frac{1}{r \cos \psi} \cdot (\hat{E}^1 \cos \varphi \cos \theta + \hat{E}^2 \sin \varphi \cos \theta + \hat{E}^3 \sin \theta) + \\
& + \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} \frac{\partial E^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} (\hat{E}^1 \cos \varphi + \hat{E}^2 \sin \varphi).
\end{aligned}$$

Остаётся выразить выражения, содержащие E^1, E^2, E^3 через $E^r, E^\theta, E^\varphi, E^\psi$. Для этого обратимся к соотношениям (3.5).

Умножим первое из них на $\cos \psi$, а второе на $(-\sin \psi)$, сложим их:

$$\begin{aligned}
& E^r \cos \psi - E^\psi \sin \psi = \\
& = \hat{E}^1 \cos \varphi \cos^2 \psi \cos \theta + \hat{E}^2 \sin \varphi \cos^2 \psi \cos \theta + \hat{E}^3 \cos^2 \psi \sin \theta + \\
& + \hat{E}^4 \sin \psi \cos \psi + \hat{E}^1 \cos \varphi \sin^2 \psi \cos \theta + \hat{E}^2 \sin \varphi \sin^2 \psi \cos \theta \\
& + \hat{E}^3 \sin^2 \psi \sin \theta - \\
& - \hat{E}^4 \sin \psi \cos \psi = \hat{E}^1 \cos \varphi \cos \theta + \hat{E}^2 \sin \varphi \cos \theta + \hat{E}^3 \sin \theta.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\hat{E}^1 \cos \varphi \cos \theta + \hat{E}^2 \sin \varphi \cos \theta + \hat{E}^3 \sin \theta = E^r \cos \psi - E^\psi \sin \psi. \quad (3.9)$$

Далее умножим полученное представление на $\cos \theta$, а третью формулу из соотношения (3.5) на $(-\sin \theta)$ и сложим их:

$$\begin{aligned}
& \hat{E}^1 \cos \varphi \cos^2 \theta + \hat{E}^2 \sin \varphi \cos^2 \theta + \hat{E}^3 \sin \theta \cos \theta + \\
& + \hat{E}^1 \cos \varphi \sin^2 \theta + \hat{E}^2 \sin \varphi \sin^2 \theta - \hat{E}^3 \sin \theta \cos \theta = \\
& = \hat{E}^1 \cos \varphi + \hat{E}^2 \sin \varphi.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\hat{E}^1 \cos \varphi + \hat{E}^2 \sin \varphi = (E^r \cos \psi - E^\psi \sin \psi) \cos \theta - E^\theta \sin \theta. \quad (3.10)$$

Используя соотношения (3.9) и (3.10), окончательно получаем

$$\begin{aligned}
\widehat{\operatorname{div}} \vec{E} &= \frac{\partial E^r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E^\psi}{\partial \psi} + \frac{E^r}{r} + \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial E^\theta}{\partial \theta} + \\
&+ \frac{1}{r \cos \psi} (E^r \cos \psi - E^\psi \sin \psi) + \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} \frac{\partial E^\varphi}{\partial \varphi} + \\
&+ \frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} \left((E^r \cos \psi - E^\psi \sin \psi) \cos \theta - E^\theta \sin \theta \right) = \\
&= \frac{\partial E^r}{\partial r} + \frac{3}{r} E^r - \frac{2}{r} E^\psi \tan \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial E^\psi}{\partial \psi} + \\
&+ \frac{1}{r \cos \psi} \left(\frac{E^\theta}{\partial \theta} - E^\theta \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial E^\varphi}{\partial \varphi} \right). \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Это и есть выражение дивергенции векторного поля $\vec{E}$ в сферической системе координат в четырехмерном евклидовом пространстве.

Теперь выпишем выражение оператора Лапласа-Бельтрами в сферической системе. Используя (3.7), (3.11), а также тождество $\widehat{\Delta} u = \widehat{\operatorname{div}}(\widehat{\nabla} u)$ находим

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta} u &= \frac{\partial}{\partial r} (\nabla u)^r + \frac{3}{r} (\nabla u)^r - \frac{2}{r} (\nabla u)^\psi \tan \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (\nabla u)^\psi + \\
&+ \frac{1}{r \cos \psi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla u)^\theta - (\nabla u)^\theta \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla u)^\varphi \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{3}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \psi} \tan \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \\
&+ \frac{1}{r \cos \psi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r \cos \psi \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right) = \\
&+ \frac{1}{r^2 \cos^2 \psi} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \psi} \tan \psi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \\
&= \frac{1}{r^2 \cos^2 \psi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \tan \theta + \frac{\partial^2 u}{r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \widehat{\Delta}'_{\psi, \theta, \varphi} \psi \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},
\end{aligned}$$

где мы обозначили

$$\widehat{\Delta}'_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\cos \theta \cos^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\cos^2 \psi \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

3.3 О фундаментальных решениях оператора Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере

Нам понадобится формулировка формулы Грина. Пусть $f(u)$ и $g(u)$ непрерывно дифференцируемые функции над $\mathbb{R}^4$. Предположим, что эти функции при $u \neq 0$ однородные степени p и q соответственно. Выберем числа r_1 и r_2 такие, что $0 < r_1 < 1 \leq r_2$. Через E обозначим единичный шар в $\mathbb{R}^4$. Запишем формулу Гаусса

$$\int_{r_2 E \setminus r_1 E} \frac{\partial}{\partial u_i} (f(u)g(u)) dV(u) = \left(\int_{r_2 S^3} - \int_{r_1 S^3} \right) f(u)g(u) \frac{u_i}{\|u\|} dS(u), \quad (3.12)$$

где $dV(u)$ - элемент объема в $\mathbb{R}^4$ в точке u , $dS(u) = r_v^3 d\omega \left(\frac{u}{\|u\|} \right)$, $v = 1, 2$ - элемент 3-мерного объема, а $d\omega$ - элемент объема на сфере S^3 .

Дифференцируем (3.12) по r_2 и затем положим $r_2 = 1$. Тогда в силу однородности f и g и природы $dS(u)$ получим соотношение

$$\int_{S^3} f(u) \cdot \frac{\partial g(u)}{\partial u_i} \cdot d\omega(u) = \int_{S^3} g(u) \left\{ [3 + p + q] f(u) u_i - \frac{\partial f(u)}{\partial u_i} \right\} d\omega(u). \quad (3.13)$$

Соотношение (3.13) представляет формулу интегрирования по частям для однородных непрерывно дифференцируемых функции. Следуя работе [44], дважды дифференцируемые на S^3 функции будем называть регулярными.

Если h является регулярной функцией нулевой степени, то

$$(\text{grad} h(u), u) = 0.$$

Теперь запишем в формулу (3.13) вместо $g(u)$ функцию $\frac{\partial h}{\partial u_i}$, затем сложим. После сложения по индексу i соотношение (3.13) приведёт к равенству

$$\int_{S^3} f(u) \Delta h(u) d\omega(u) = - \int_{S^3} (\text{grad} f(u), \text{grad} h(u)) d\omega(u) = \int_{S^3} h(u) \Delta f(u) d\omega(u).$$

Обобщим формулу (3.13) на случай, когда $f(u)$ регулярна во всех точках, кроме, быть может одной $u = u'$. Функцию f заданную на единичной сфере S^3 можно продолжить на всё $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ по формуле

$$f(u, u') = f \left(\frac{u - u'}{\|u - u'\|} \right).$$

Расширенная указанным образом функция будет сингулярной во всех точках $ru', r > 0$.

В интеграле по объёму (3.12) удалим множество $M(\varepsilon)$ точек u , для которых

$$r_1 \leq \|u\| \leq r_2, (u', u) \geq \|u\| \|u'\| \cos \varepsilon, \quad (3.14)$$

где $0 < \varepsilon < \pi/2$.

Если $\omega(\varepsilon) = S^3 \cap M(\varepsilon)$, то границу $M(\varepsilon)$ составляют множества $r_1 \omega(\varepsilon)$, $r_2 \omega(\varepsilon)$ и $N(\varepsilon)$ - подмножество $M(\varepsilon)$, для которого выполняется равенство во втором условии (3.14). В правую часть (3.12) нужно добавить интеграл

$$\int_{N(\varepsilon)} f(u) g(u) v_i(u) dS(u),$$

где $v(u)$ - единичная нормаль к $N(\varepsilon)$, направленная в $M(\varepsilon)$.

Лемма 3.1. Единичная нормаль вычисляется по формуле

$$v(u) = \frac{u'}{\|u'\|} \operatorname{cosec} \varepsilon - \frac{u}{\|u\|} \cot \varepsilon. \quad (3.15)$$

Доказательство. Пусть во втором условии (3.14) выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{u'_i}{\|u'\|} \cdot \frac{u_i}{\|u\|} = \cos \varepsilon.$$

Продифференцируем последнее равенство по u_1 :

$$\begin{aligned} \frac{u'_1}{\|u'\|} \cdot \frac{1}{\|u\|} + \sum_{i=1}^4 \frac{u'_i \cdot u_i}{\|u'\|} \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{2u_1}{\|u\|^3} \right) = \\ = \frac{u'_1}{\|u'\| \cdot \|u\|} - \frac{u_1}{\|u\|^2} \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Точно также можно дифференцировать по u_2, u_3, u_4 . В результате имеем выражение для соответствующего градиента

$$\frac{u'}{\|u'\| \cdot \|u\|} - \frac{u}{\|u\|^2} \cos \varepsilon.$$

Следовательно, требуемая нормаль в $v(u)$ коллинеарна вектору

$$\frac{u'}{\|u'\|} - \frac{u}{\|u\|} \cos \varepsilon.$$

Ясно, что длина вектора $\frac{u'}{\|u'\|} - \frac{u}{\|u\|} \cos \varepsilon$ равна $\sin \varepsilon$. Поэтому требуемая нормаль $v(u)$ имеет вид (3.15).

Лемма 3.1 полностью доказана.

Положим $n(\varepsilon) = S^3 \cap N(\varepsilon)$, которая является границей $\omega(\varepsilon)$ на S^3 . Множество ω' точек w таких, что $\|w\| = 1, (u', w) = 0$, является двумерной сферической поверхностью, аналогичной $n(\varepsilon)$. Элемент площади ω' , внутренняя нормаль которого лежит в плоскости u' и $v(u)$, обозначим через $d\omega'(v(u))$. Тогда на $n(\varepsilon)$ имеем

$$dS(u) = \varepsilon^2 r^2 dr d\omega'(v(u)),$$

где $r = \|u\|$.

Повторяя наше предыдущее рассуждение, мы находим вместо равенства (3.13) следующее соотношение

$$\begin{aligned} \int_{S^3 - \omega(\varepsilon)} f(u) \frac{\partial g(u)}{\partial u_i} d\omega(u) &= \int_{S^3 - \omega(\varepsilon)} g(u) \left[(3 + p + q) f(u) u_i - \frac{\partial f(u)}{\partial u_i} \right] d\omega(u) \\ &+ \varepsilon^2 \int_{n(\varepsilon)} f(u) g(u) v_i(u) d\omega'(v(u)). \end{aligned}$$

Введём функцию h_1 , определенную для $u \neq u'$ формулой

$$h_1(u', u) = -\frac{1}{\omega_3} [s(u', u)]^{-1}, \quad (3.16)$$

где s - сферическое расстояние, определяемое выражением

$$s(u', u) = \text{Arccos}[(u', u)/\|u\|\|u'\|]. \quad (3.17)$$

Введённая функция $h_1(u, u')$ имеет особенность при $u = u'$. Особенность указанного порядка называется фундаментальной особенностью.

Пусть h_2 - симметричная функция от u' и u , регулярная над $S^3 \times S^3$ и продолженная по однородности нулевой степени по u' и u . Тогда функция $h(u) = h_1(u) + h_2(u)$ удовлетворяет условию

$$(\operatorname{grad} h(u), u) = 0.$$

Далее, предположим, что F также является однородной функцией нулевой степени. Здесь $f(u) = \frac{\partial F}{\partial u_i}$. Тогда стандартными манипуляциями получаем

$$\begin{aligned} & \int_{S^3 - \omega(\varepsilon)} [h(u', u) \Delta F(u) - F(u) \Delta h(u', u)] d\omega(u) \\ &= \varepsilon^2 \int_{n(\varepsilon)} [h(u', u) (\operatorname{grad} F(u), v(u)) - F(u) (\operatorname{grad} h(u', u), v(u))] d\omega'(v(u)), \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Так как на $n(\varepsilon)$ имеем $s(u', u) = \varepsilon$ и из (3.15) и (3.17)

$$\operatorname{grad} s(u', u) = -v(u).$$

Отсюда с помощью (3.16) получим

$$(\operatorname{grad} h_1(u', u), v(u)) = -\frac{\varepsilon^{-2}}{\omega_3}.$$

Эти наблюдения и регулярность F и h_2 позволяют сделать вывод, что

$$F(u') = \int_{S^3} [h(u', u) \Delta F(u) - F(u) \Delta h(u', u)] d\omega(u).$$

Пусть s по-прежнему определяется формулой (3.17) и, следуя работе [44], ПОЛОЖИМ

$$\gamma(s) = -\frac{1}{\omega_4} \int_{\frac{\pi}{2}}^s \operatorname{cosec}^2 t \left(\int_{\pi}^t \sin^2 t' dt' \right) dt.$$

Тогда фундаментальное решение определяется для $u \neq u'$ формулой

$$G(u', u) = \gamma(s(u', u)).$$

Таким образом,

$$\Delta' G(u', u) = -\frac{1}{\omega_4} + \delta(u' - u), \quad (3.18)$$

где Δ' - лапласиан относительно u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 . Здесь через $\delta(u', u)$ обозначена дельта-функция Дирака на сфере S^3 . Также заметим, что непосредственные вычисления позволяют убедиться, что

$$G(u', u) = h_1(u', u) + h_2(u', u),$$

где

$$h_1(u', u) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{s(u', u)}$$

$$h_2(u', u) = \frac{s(u', u)}{4\pi^2} \cdot \frac{\cos s(u', u)}{\sin s(u', u)} - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{s(u', u)}{\sin s(u', u)} \cdot \cos s(u', u) - 1 \right] \cdot \frac{1}{s(u', u)}.$$

Здесь h_2 симметричная функция от u' и u , регулярная над $S^3 \times S^3$ и продолженная до однородности нулевой степени по u' и u , а h_1 — функция с фундаментальной особенностью, определяемая следующей формулой

$$h_1(u', u) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{s(u', u)}.$$

Заметим, что G определена для всех u , не равных u' , и является однородной нулевой степени, причем G симметрична относительно u и u' .

3.4 Оператор Лапласа-Бельтрами на сфере с разрезом

Выберем на S^3 в R^4 стандартную сферическую систему координат $x = \cos \varphi \cos \psi \cos \theta, y = \sin \varphi \cos \psi \cos \theta, z = \cos \psi \sin \theta, w = \sin \psi$. Заметим, что параметры ψ и θ изменяются в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, а параметр φ пробегает интервал $(0, 2\pi)$.

На трёхмерной сфере S^3 выберем окружность C , заданную соотношением

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2}, z = \frac{1}{2}, x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

или $\psi_0 = \frac{\pi}{4}, \theta_0 = \frac{\pi}{4}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Рассмотрим сферу с разрезом S_c^3 , определяемую соотношением

$$S_c^3 = S^3 \setminus C.$$

Пусть $\delta > 0$. На трехмерной сфере S^3 рассмотрим δ - окрестность окружности C определяемую следующим образом

$$\Pi_c(\delta) = \left\{ (\psi, \theta, \varphi) \in S^3 : \left| \psi - \frac{\pi}{4} \right| < \delta, \left| \theta - \frac{\pi}{4} \right| < \delta, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

Нам удобно ввести класс функций

$$W_{2,loc}^2(S_c^3) = \bigcup_{\delta > 0} W_2^2(S^3 \setminus \Pi_c(\delta)),$$

где $W_2^2(\Omega)$ - пространство С.Л. Соболева на области $\Omega \subset S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Для дальнейших целей удобно ввести операторы K_1, K_2, K_3 по формулам

$$\begin{aligned} (K_1 z)(\varphi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\frac{\partial \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} - \delta, \theta, \varphi \right)}{\partial \psi} + \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} - \delta, \theta, \varphi \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} + \delta, \theta, \varphi \right)}{\partial \psi} - \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} + \delta, \theta, \varphi \right) \right) \cos \theta d\theta + \\ &\quad + \sqrt{2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\frac{\partial \hat{z} \left(\psi, \frac{\pi}{4} - \delta, \varphi \right)}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{z} \left(\psi, \frac{\pi}{4} + \delta, \varphi \right)}{\partial \theta} \right) d\psi, \\ (K_2 z)(\varphi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\hat{z} \left(\frac{\pi}{4} + \delta, \theta, \varphi \right) - \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} - \delta, \theta, \varphi \right) \right) \cos \theta d\theta, \\ (K_3 z)(\varphi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\hat{z} \left(\psi, \frac{\pi}{4} + \delta, \varphi \right) - \hat{z} \left(\psi, \frac{\pi}{4} - \delta, \varphi \right) \right) d\psi. \end{aligned}$$

Линейные операторы K_i при $i = 1, 2, 3$ переводят функций z , заданные на S^3 в функции $l = K_i z$, определенные на окружности C .

Также необходимо определить следующий класс функции

$$W_{2,K}^2(S_c^3) = \left\{ z \in W_{2,loc}^2(S_c^3) : K_i z \in L_2(0, 2\pi), i = 1, 2, 3, \int_{S^3} z dV = 0 \right\}.$$

Возьмём произвольный элемент z из класса $W_{2,K}^2(S_c^3)$. Обозначим через $T(x) = \int_{S^3 \setminus \Pi_c(\delta)} G(x, y) \Delta_{S_y^3} z(y) dV(y)$.

Преобразуем T , используя выражение оператора Лапласа-Бельтрами

$$\begin{aligned} T(\psi', \theta', \varphi') &= \int_{S^3 \setminus \Pi_c(\delta)} G(\psi', \theta', \varphi'; \psi, \theta, \varphi) \cdot \left(\frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial \hat{z}}{\partial \psi} \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{\cos \theta \cos^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} \right) + \left. \frac{1}{\cos^2 \psi \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial \varphi^2} \right) 3 \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta d\varphi = \\ &= 3 \int_{S^3 \setminus \Pi_c(\delta)} G(\psi', \theta, \varphi'; \psi, \theta, \varphi) \cos \psi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial \hat{z}}{\partial \psi} \right) d\psi d\theta d\varphi + \\ &+ 3 \int_{S^3 \setminus \Pi_c(\delta)} G(\psi', \theta', \varphi'; \psi, \theta, \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} \right) d\psi d\theta d\varphi + \\ &+ 3 \int_{S^3 \setminus \Pi_c(\delta)} G(\psi; \theta, \varphi'; \psi, \theta, \varphi) \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial \varphi^2} d\psi d\theta d\varphi = I_\psi + I_\theta + I_\varphi. \end{aligned}$$

Преобразуем отдельно следующий интеграл

$$\begin{aligned} I_\theta &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\delta} + \int_{\frac{\pi}{4}+\delta}^{\frac{\pi}{2}} \right) G \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} \right) d\theta \right) d\psi \right) + \\ &+ 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\delta} + \int_{\frac{\pi}{4}+\delta}^{\frac{\pi}{2}} \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} G \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} \right) d\theta \right) d\psi \right) = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\cos \theta \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} G - \hat{z} \cos \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}+\delta}^{\theta=\frac{\pi}{4}-\delta} d\psi \right) + \\ &+ 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\delta} + \int_{\frac{\pi}{4}+\delta}^{\frac{\pi}{2}} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} G - \hat{z} \cos \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\psi \right) + \\ &+ 3 \int \frac{1}{\cos \theta \cos^2 \psi} \hat{z} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Если $\delta \rightarrow +0$, то отсюда имеем предельное соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I_\theta = \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\frac{\partial \hat{z} \left(\psi, \frac{\pi}{4} - \delta, \varphi \right)}{\partial \theta} G \left(\psi', \theta', \varphi'; \psi, \frac{\pi}{4} - \delta, \varphi \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial \hat{z} \left(\psi, \frac{\pi}{4} - \delta, \varphi \right)}{\partial \theta} G \left(\psi'; \theta', \varphi'; \psi, \frac{\pi}{4} + \delta, \varphi \right) \right) d\psi - \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi, \\
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\hat{z} \left(\psi, \frac{\pi}{4} + \delta, \varphi \right) \frac{\partial G \left(\psi', \theta', \varphi'; \psi, \frac{\pi}{4} + \delta, \varphi \right)}{\partial \theta} - \right. \\
& \left. - \hat{z} \left(\psi, \frac{\pi}{4} + \delta, \varphi \right) \frac{\partial G \left(\psi', \theta', \varphi'; \psi, \frac{\pi}{4} + \delta, \varphi \right)}{\partial \theta} \right) d\psi + \\
& + 3 \int \frac{1}{\cos \theta \cos^2 \psi} \hat{z} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta d\varphi = \\
& = \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} G \left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi \right) d\varphi, \\
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\frac{\partial \hat{z} \left(\psi, \frac{\pi}{4} - \delta, \varphi \right)}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{z} \left(\psi, \frac{\pi}{4} - \delta, \varphi \right)}{\partial \theta} \right) d\psi - \\
& - \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G \left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi \right)}{\partial \theta} d\varphi, \\
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\hat{z} \left(\psi, \frac{\pi}{4} + \delta, \varphi \right) - \hat{z} \left(\psi, \frac{\pi}{4} + \delta, \varphi \right) \right) d\psi + \\
& + 3 \int \frac{1}{\cos \theta \cos^2 \psi} \hat{z} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Точно также преобразуем значение интеграла I_ψ :

$$\begin{aligned}
I_\psi &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \\
& \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\delta} + \int_{\frac{\pi}{4}+\delta}^{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial \hat{z}}{\partial \psi} \right) \cos \psi \cos \theta G d\psi \right) d\theta + \right. \\
& + 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\delta} + \int_{\frac{\pi}{4}+\delta}^{\frac{\pi}{2}} \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial \hat{z}}{\partial \psi} \right) \cos \psi \cos \theta G d\psi \right) d\theta =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \\
&\cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\cos^2 \psi \cos \theta \frac{\partial \hat{z}}{\partial \psi} G - z \cos \psi \frac{\partial}{\partial \psi} (\cos \psi \cos \theta G) \right) \Big|_{\psi=\frac{\pi}{4}+\delta}^{\psi=\frac{\pi}{4}-\delta} d\theta \right) + \\
&\quad + 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\delta} + \int_{\frac{\pi}{4}+\delta}^{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 \psi \cos \theta \frac{\partial \hat{z}}{\partial \psi} G - z \cos \psi \frac{\partial}{\partial \psi} (\cos \psi \cos \theta G) \right) \Big|_{\psi=-\frac{\pi}{2}}^{\psi=\frac{\pi}{2}} d\theta \right) + \right. \\
&\quad + 3 \int_{S^3 \setminus \Pi_c(\delta)} z \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial G}{\partial \psi} \right) \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta d\varphi = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
&= \left(\int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\cos^2 \psi \frac{\partial z}{\partial \psi} G - z \cos^2 \psi \frac{\partial G}{\partial \psi} + z \cos \psi \sin \psi G \right) \Big|_{\psi=\frac{\pi}{4}+\delta}^{\psi=\frac{\pi}{4}-\delta} \cos \theta d\theta \right) + \\
&\quad + 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\delta} + \int_{\frac{\pi}{4}+\delta}^{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\cos^2 \psi \frac{\partial z}{\partial \psi} G - z \cos^2 \psi \frac{\partial G}{\partial \psi} + z \cos \psi \sin \psi G \right) \Big|_{\psi=-\frac{\pi}{2}}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \right) + \\
&\quad + 3 \int_{S^3 \setminus \Pi_c(\delta)} z \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial G}{\partial \psi} \right) \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Также имеем предельное соотношение

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} I_\psi &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\frac{\partial \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} - \delta, \theta, \varphi \right)}{\partial \psi} G \left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4} - \delta, \theta, \varphi \right) - \right. \\
&\quad \left. - \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} - \delta, \theta, \varphi \right) \frac{\partial G \left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4} - \delta, \theta, \varphi \right)}{\partial \psi} + \right. \\
&\quad \left. + z \left(\frac{\pi}{4} - \delta, \theta, \varphi \right) G \left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4} - \delta, \theta, \varphi \right) \right) \cos \theta d\theta -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\frac{\partial \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} + \delta, \theta, \varphi \right)}{\partial \psi} G \left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4} + \delta, \theta, \varphi \right) - \right. \\
& \quad \left. - \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} + \delta, \theta, \varphi \right) \frac{\partial G \left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4} + \delta, \theta, \varphi \right)}{\partial \psi} + \right. \\
& \quad \left. + z \left(\frac{\pi}{4} + \delta, \theta, \varphi \right) G \left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4} + \delta, \theta, \varphi \right) \right) \cos \theta d\theta + \\
& + 3 \int_{S^3 \setminus \Pi_c(\delta)} \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial G}{\partial \psi} \right) \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta d\varphi = \\
& = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} G \left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi \right) d\varphi \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\frac{\partial \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} - \delta, \theta, \varphi \right)}{\partial \psi} + \right. \\
& \quad \left. + \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} - \delta, \theta, \varphi \right) - \frac{\partial \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} + \delta, \theta, \varphi \right)}{\partial \psi} - z \left(\frac{\pi}{4} + \delta, \theta, \varphi \right) \right) \cos \theta d\theta + \\
& \quad + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G \left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi \right)}{\partial \psi} d\varphi, \\
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{4}-0}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \left(\hat{z} \left(\frac{\pi}{4} + \delta, \theta, \varphi \right) - \hat{z} \left(\frac{\pi}{4} - \delta, \theta, \varphi \right) \right) \cos \theta d\theta + \\
& + 3 \int_{S^3 \setminus \Pi_c(\delta)} z \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial G}{\partial \psi} \right) \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Остаётся преобразовать интеграл I_φ .

$$\begin{aligned}
I_\varphi & = \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} d\psi \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\delta} + \int_{\frac{\pi}{4}+\delta}^{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{d\theta}{\cos \theta} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial \varphi^2} G d\varphi = \\
& = \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} d\psi \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\delta} + \int_{\frac{\pi}{4}+\delta}^{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{d\theta}{\cos \theta} \left(\frac{\partial \hat{z}}{\partial \varphi} G \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial \varphi} d\varphi \right) = \\
& = \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} d\psi \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\delta} + \int_{\frac{\pi}{4}+\delta}^{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{d\theta}{\cos \theta} \left(\frac{\partial \hat{z}}{\partial \varphi} G - \hat{z} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} + \\
& + 3 \int_{S^3 \setminus \Pi_c(\delta)} z \frac{1}{\cos^2 \psi \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Выпишем предел для интеграла

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I_\varphi = \\ = 3 \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S^3 \setminus \Pi_C(\delta)} \frac{1}{\cos^2 \psi \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 G(\psi', \theta, \varphi'; \psi, \theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta d\varphi.$$

Таким образом, получим значение $T(\psi', \theta', \varphi')$:

$$\begin{aligned} T(\psi', \theta', \varphi') &= \int_{S^3 \setminus C} \hat{z}(\psi', \theta', \varphi'; \psi, \theta, \varphi) \Delta G(\psi', \theta', \varphi'; \psi, \theta, \varphi) dV + \\ &+ \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} G\left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi\right) (K_1 z)(\varphi) d\varphi + \\ &+ \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G\left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)}{\partial \psi} (K_2 z)(\varphi) d\varphi - \\ &- \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G\left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)}{\partial \theta} (K_3 z)(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отсюда вытекает утверждение, где описана структура элементов введённого пространства.

Лемма 3.2. Для любой функций $z \in W_{2,K}^2(S_c^3)$ справедливо представление

$$\begin{aligned} z(\psi', \theta', \varphi', \psi, \theta, \varphi) &= \\ &= T(\psi', \theta', \varphi') - \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} G\left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi\right) (K_1 z)(\varphi) d\varphi - \\ &- \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G\left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)}{\partial \psi} (K_2 z)(\varphi) d\varphi + \\ &+ \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G\left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)}{\partial \theta} (K_3 z)(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $T \in W_2^2(S^3)$. Представление (3.20) единственно.

Поскольку представление (3.20) единственно, то можно ввести оператор J , который каждому элементу $z \in W_{2,K}^2$ ставит в соответствие элемент $T \in W_2^2(S^3)$, то есть $T = Jz$. Используя оператор J , определим оператор $B_{\max}$ по формулам

$$B_{\max} z = B_0 Jz,$$

где B_0 - оператор Лапласа-Бельтрами на S^3 .

Доказательство Леммы 3.2. Подставляем соотношение (3.18) в равенство (3.19):

$$\begin{aligned}
T = & z(\psi', \theta', \varphi'; \psi, \theta, \varphi) - \\
& - \frac{1}{\omega_4} \int_{S^3} z dV + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} G\left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi\right) (K_1 z)(\varphi) d\varphi + \\
& + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G\left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)}{\partial \psi} (K_2 z)(\varphi) d\varphi - \\
& - \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G\left(\psi', \theta', \varphi'; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)}{\partial \theta} (K_3 z)(\varphi) d\varphi.
\end{aligned}$$

Так как $z \in W_{2k}$, то $\int_{S^3} z dV = 0$. Тогда Лемма 3.2 полностью доказана. Следующее утверждение играет важную роль в дальнейших конструкциях.

Теорема 3.3. При любых $f \in L_2(S^3)$ и произвольных $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in L_2(C)$ задача

$$\begin{aligned}
B_{\max} z &= f(x), \quad x \in S^3 \setminus C \\
(K_i z)|_C &= \eta_i|_C, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

имеет единственное решение в классе $W_{2k}^2(S^3 \setminus C)$.

Доказательство теоремы 3.3 проводится точно также как была доказана теорема 1 в работе [37].

Введём операторы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в виде следующих интегральных операторов при $\forall f \in L_2(S^3)$

$$(\gamma_i f)(\varphi) = 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha_i f \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

где $\alpha_i(\psi, \theta)$ - произвольный элемент из $L_2\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^2\right)$.

В таком случае из теоремы 3.3 вытекает основной результат данной работы.

Теорема 3.4. Пусть при $i = 1, 2, 3$ функция $\alpha_i(\psi, \theta)$ принадлежит пространству $L_2\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^2\right)$ и операторы γ_i определяется по формулам (3.21). Тогда при любом $f \in L_2(S^3)$ следующая задача

$$\begin{aligned}
B_{\max} z &= f(x), \quad x \in S^3 \setminus C \\
(K_i z)(\varphi) &= \gamma_i(B_{\max} z), \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

имеет единственное решение в пространстве $W_{2k}^2(S^3 \setminus C)$.

Доказательство теоремы 3.4 проводится точно также как была доказана теорема 2 в работе [37].

Пример. Пусть дана достаточно гладкая функция $\alpha_i(\psi, \theta)$, которая удовлетворяет равенству

$$3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial \alpha_i}{\partial \psi} \right) \cos \psi \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta} \right) \right) d\psi d\theta = 0. \quad (3.22)$$

Выпишем граничную задачу

$$\begin{aligned} & 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha_i(\psi, \theta) \Delta J z \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta = \\ & = 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\alpha_i \cos^2 \psi \cos \theta \frac{\partial J z}{\partial \psi} - J z \cos \psi \frac{\partial}{\partial \psi} (\alpha_i \cos \psi \cos \theta) \right) \Bigg|_{\psi=-\frac{\pi}{2}}^{\psi=\frac{\pi}{2}} d\theta + \\ & + 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J z \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial \alpha_i}{\partial \psi} \right) \cos \psi \cos \theta d\psi d\theta + \\ & + 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\alpha_i \cos \theta \frac{\partial J z}{\partial \theta} - J z \cos \theta \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta} \right) \Bigg|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\psi + \\ & + 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J z \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta} \right) d\psi d\theta + 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha_i \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 J z}{\partial \varphi^2} d\psi d\theta. \end{aligned}$$

Следующее соотношение вытекает с учетом условия (3.22):

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha_i(\psi, \theta) \Delta J z \cos^2 \psi \cos \theta d\psi d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha_i \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 J z}{\partial \varphi^2} d\psi d\theta.$$

Таким образом, из теоремы 3.4 вытекает корректная разрешимость следующей краевой задачи

$$\begin{aligned} B_{\max} z &= f(x), x \in S^3 \setminus C \\ (K_i z)(\varphi) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha_i \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 J z}{\partial \varphi^2} d\psi d\theta. \end{aligned}$$

В заключении данного пункта выпишем теорему для граничной задачи.

Теорема 3.5. Пусть для $\forall \alpha_i \in W_2^2 \left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)^2 \right)$ выполняется равенство

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial \alpha_i}{\partial \psi} \right) \cos \psi \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta} \right) \right) d\psi d\theta = 0.$$

Тогда для $\forall f \in L_2(S^3)$ краевая задача

$$\begin{aligned} B_{\max} z &= f(x), x \in S^3 \setminus C \\ (K_i z)(\varphi) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha_i \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 Jz}{\partial \varphi^2} d\psi d\theta \end{aligned}$$

имеет единственное решение.

В данном пункте изучались дельта-подобные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере. В работе рассматривается трёхмерная сфера $\mathbb{R}^4$ как риманово многообразие. При постановке корректных задач используется ранее известное фундаментальное решение для оператора Лапласа-Бельтрами. Поставлена корректная задача для оператора Лапласа-Бельтрами на трехмерной сфере в четырехмерном евклидовом пространстве с разрезом, которая представляет окружность. Приведен пример, иллюстрирующий структуру корректной задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на трехмерной сфере, из которой удалена окружность. В перспективе необходимо исследовать спектральные свойства операторов, соответствующие поставленным корректно разрешимым задачам для оператора Лапласа-Бельтрами на сфере с разрезом вдоль многообразии малых размерностей.

4 СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В данной работе рассмотрен спектр оператора Лапласа-Бельтрами. Оператор, определённый на сфере и из которой убирается произвольная точка называется проколотой сферой. Далее приводится оператор Лапласа-Бельтрами, определённый на гладком римановом многообразии. Оператор Лапласа-Бельтрами рассматривается как угловая часть оператора Лапласа. Оператор является инвариантным, поэтому проколотые области объединены. Оператор Лапласа-Бельтрами является дифференциальным оператором второго порядка эллиптического типа в римановом пространстве с положительно определённой метрикой. Используются известные формулы собственных значений и собственных функций. В ходе вычисления выписано, что размерность гладкого риманово многообразия равна трём. Для определения пространства граничных значений понадобились некоторые свойства функции Грина оператора Лапласа-Бельтрами, то есть интегрального ядра оператора. Таким образом, использованы новые корректно разрешимые краевые задачи для соответствующего оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной проколотой сфере. Для этого вводится набор линейных функционалов. Здесь явна показана физическая интерпретация вычисленных данных. Подробно изучаются собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами. В работе активно использована теория аналитических функций, благодаря которой удалось сформулировать решение для оператора. Лапласиан естественным образом обобщается на случай комплексно значных функций таким образом, что его спектр в комплексном и вещественном случаях совпадают. В данной работе проводится подробное исследование структуры пространств собственных функций. В результате вычислен спектр возмущённого оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной проколотой сфере.

Спектральная теория оператора Лапласа-Бельтрами изучалась во многих источниках. Собственные значения и собственные функции оператора также известны. При записи спектральной задачи мы используем метод аналогии. Аналогия между задачами линейной алгебры и теории колебаний была замечена давно. Однако систематически использовать эту аналогию начал Д. Гильберт [48] в своих основополагающих работах по теории интегральных уравнений. В результате появилось гильбертово пространство l_2 , а затем и общее гильбертово пространство.

В [20] изучается локализация дискретного спектра некоторых возмущений двумерного гармонического осциллятора. Также установлено, что собственные значения гармонического осциллятора также будут собственными значениями корректных связей. В работе [21] изучается спектр оператора Лапласа в ограниченной односвязной области с нулевым условием Дирихле на границе при дельтаобразных возмущениях оператора во внутренней точке области. В [49] определяются и классифицируются алгебраическая, геометрическая и

аналитическая кратности собственных значений для линейных дифференциальных операторов. Приводятся соотношения между тремя кратностями собственного значения линейного дифференциального оператора и доказывается фундаментальный факт равенства алгебраической, геометрической и аналитической кратностей любого собственного значения самосопряженного дифференциального оператора. В [50] выписывается спектр операторов Вольтерра с конечномерными возмущениями. В работе [4] дано полное описание хорошо разрешимых краевых задач для оператора Лапласа в окружности и в проколотой окружности. В статье [51] изучается оператор Лапласа в проколотой области гильбертова пространства, а также изучается определённый класс корректно поставленных задач.

В отличие от вышеуказанных работ, в данной работе собственные значения оператора Лапласа-Бельтрами на гладком римановом многообразии выписаны в явном виде.

Пусть S^2 - двумерная сфера евклидова пространства R^3 . Выберем [44] фиксированный обратимый самосопряжённый оператор Лапласа-Бельтрами $B_0 = B_0^* = I - \Delta_{S^2}$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(S^2)$. Область определения этого оператора обозначается как $W_2^2(S^2) \subset L_2(S^2)$.

Известно [25], что собственные значения оператора B_0 вычисляются по формулам $\lambda_l = 1 + l(l + 1)$, $l \geq 0$. Поскольку все $\lambda_l \geq 1$, то существует обратный оператор B_0^{-1} , который является интегралом $B_0^{-1}f(x) = \int_{S^2} \varepsilon(x, t)f(t)ds_t$. Ядро интегрального оператора $\varepsilon(x, t)$ определяет функцию Грина оператора B_0 .

Как функция x при $x \neq t$, функция Грина $\varepsilon(x, t)$ удовлетворяет равенству $(I - \Delta_{S^2}) \varepsilon(t, x) = 0$, которое следует из определения обратного оператора B_0^{-1} . Легко видеть, что частные производные $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t_1}(x, t), \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_2}(x, t)$ также удовлетворяют равенствам при $x \neq t$

$$\begin{aligned}(I - \Delta_{S^2}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_1}(x, t) &= 0, \\ (I - \Delta_{S^2}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_2}(x, t) &= 0.\end{aligned}$$

Известно [25], что собственные значения оператора B_0 могут быть только числами $\lambda_l = 1 + l(l + 1)$, где $l \geq 0$ - целые числа. Собственные функции оператора B_0 , соответствующие оператору, задаются формулой:

$$\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_{lm}(\cos \theta) \cos m\varphi, m = 0, \dots, l \\ P_{l|m|}(\cos \theta) \sin|m|\varphi, m = -1, -2, \dots, -l, \end{cases}$$

где $P_{lm}(\cos \theta)$ представляет собой соответствующие функции Лежандра.

Обратим внимание [26], что собственные функции оператора B_0 обладают свойством

$$\hat{Y}_{lm}(\theta, \varphi) = \hat{Y}_{lm}(\pi - \theta, \pi + \varphi). \quad (4.1)$$

Для проверки требуемого равенства достаточно проверить, что чётность ассоциированных функций Лежандра $P_{lm}(t)$ совпадает с чётностью $l + |m|$.

Известно [25], что система собственных функций оператора B_0 образует ортогональный базис в функциональном пространстве $L_2(S^2)$.

Обратим внимание, что выполняются следующие равенства:

$$(Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi))_{S^2} = \begin{cases} \frac{4\pi}{2l+1}, m = 0 \\ \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \frac{2\pi}{2l+1}, 1 \leq |m| \leq l. \end{cases}$$

Известно [48], что функция Грина $\varepsilon(x, t)$ разлагается по собственным функциям оператора B_0 . Функция Грина $\varepsilon(x, t)$ по формуле имеет следующий вид:

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{1+l(l+1)} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(x) Y_{lm}(t)}{\frac{2\pi}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}}. \quad (4.2)$$

4.1 Оператор Лапласа-Бельтрами с дельтаобразными возмущениями

В этом разделе формулируются новые корректно разрешимые задачи для оператора $(I - \Delta_{S^2})$ на проколотой сфере $S_0^2 = S^2 \setminus \{x_0\}$. Здесь x_0 - неподвижная точка в S^2 . Для $x_0 \in S^2$ существует конечный набор элементов $\{\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x)\}$, определяемый следующим образом

$$\psi_0(x) = \varepsilon(x, t), \psi_1(x) = \frac{\partial}{\partial t_1} \varepsilon(x, t), \psi_2(x) = \frac{\partial}{\partial t_2} \varepsilon(x, t),$$

где $x \in S_0^2$.

Множество элементов $\{\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x)\}$ не принадлежит пространству $L_2(S^2)$, т.е. $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x) \notin L_2(S^2)$, и тем более не принадлежит пространству $W_2^2(S^2)$. Нам также удобно ввести набор линейных функционалов [37] $\{U_0, U_1, U_2\}$:

$$\begin{aligned}
U_0(\hat{h}) &= \sin \theta_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\theta_0 - \delta, \beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial \hat{h}(\theta_0 + \delta, \beta)}{\partial \alpha} \right) d\beta + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\alpha, \varphi_0 - \delta)}{\partial \beta} - \frac{\partial \hat{h}(\alpha, \varphi_0 + \delta)}{\partial \beta} \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right] + \\
&+ \sin \theta_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\pi + \varphi_0 - \delta}^{\pi + \varphi_0 + \delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\pi - \theta_0 - \delta, \beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial \hat{h}(\pi - \theta_0 + \delta, \beta)}{\partial \alpha} \right) d\beta + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\pi - \theta_0 - \delta}^{\pi - \theta_0 + \delta} \left(\frac{\partial \hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_0 - \delta)}{\partial \beta} - \frac{\partial \hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_0 + \delta)}{\partial \beta} \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right], \\
U_1(\hat{h}) &= \sin \theta_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} \left(\hat{h}(\theta_0 + \delta, \beta) - \hat{h}(\theta_0 - \delta, \beta) \right) d\beta \right] + \\
&+ \sin \theta_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\pi + \varphi_0 - \delta}^{\pi + \varphi_0 + \delta} \left(\hat{h}(\pi - \theta_0 + \delta, \beta) - \hat{h}(\pi - \theta_0 - \delta, \beta) \right) d\beta \right], \\
U_2(\hat{h}) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} \left(\hat{h}(\alpha, \varphi_0 + \delta) - \hat{h}(\alpha, \varphi_0 - \delta) \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right] + \\
&+ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\pi - \theta_0 - \delta}^{\pi - \theta_0 + \delta} \left(\hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_0 + \delta) - \hat{h}(\alpha, \pi + \varphi_0 - \delta) \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right],
\end{aligned}$$

где $x_0 = (\theta_0, \varphi_0) \in S^2$.

Известно [52], что введённые функционалы имеют физическую интерпретацию. В частности, функционал U_0 является предельным значением потенциала двойного слоя, а функционалы U_1, U_2 - предельными значениями потенциалов простого слоя.

Используя выбранные потенциалы, введём класс функций

$$W_{2,U}^2(S_0^2) = \{h(x) \in W_{2,loc}^2(S_0^2) : \exists U_0(h), U_1(h), U_2(h)\}.$$

Следующее утверждение [37] определяет связь между множеством $\{\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x)\}$ и множеством $\{U_0, U_1, U_2\}$.

Лемма 4.1. Биортогональные соотношения справедливы при $j, k = 0, 1, 2$:

$$U_j(\psi_k) = \delta_{jk},$$

где δ_{jk} - символ Кронекера.

Следовательно, следующее утверждение играет важную роль.

Лемма 4.2. Пусть $h(t)$ - произвольный элемент класса $W_{2,U}^2(S_0^2)$. Тогда функция $h(x)$ представляется в следующем виде

$$h(x) = g(x) - \alpha_0 \psi_0(x) - \alpha_1 \psi_1(x) - \alpha_2 \psi_2(x), \quad (4.3)$$

где $g(x)$ - некоторая гладкая функция пространства $W_2^2(S^2)$, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ - некоторые комплексные числа. При этом представление (4.3) единственно.

Отметим, что леммы 4.1 и лемма 4.2 были доказаны в [54].

Согласно лемме 4.2, вводится оператор J . Оператор J отображает произвольный элемент $h \in W_{2,U}^2(S_0^2)$ в элемент $g \in W_2^2(S^2)$, то есть $g(x) = Jh(x)$. Точно так же, согласно лемме 4.2, вводятся линейные функционалы $\alpha_k(h)$, $k = 0, 1, 2$.

В [37] доказана следующая теорема.

Теорема 4.3. Пусть $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ - произвольный набор линейных функционалов в пространстве $L_2(S^2)$. Тогда для любого $f \in L_2(S^2)$ следующая задача

$$B_0 Jh(x) = f(x), x \in S_0^2, U_k(h) = \gamma_k(B_0 Jh), k = 0, 1, 2 \quad (4.4)$$

имеет единственное решение класса $W_{2,U}^2(S_0^2)$. Оператор, соответствующий задаче (4.4), обозначим через B_γ .

В следующем разделе исследуется спектр оператора B_γ .

4.2 Спектр оператора Лапласа-Бельтрами с дельтаобразными возмущениями

Согласно теореме 4.3, вводится оператор B_γ . В этом подразделе вычисляются собственные значения указанного оператора.

Для вычисления собственных значений мы используем уравнение $B_0 J u = \lambda J u$, которое предполагает, что уравнение $B_0 g = \lambda g$. Собственные значения оператора B_0 известны и записываются как $\lambda_l = 1 + l(l + 1)$. Функция g является собственной функцией $g(x) = Y_{lm}(x)$, $m = -l, \dots, 0, \dots, l$. Из приведённых выше граничных условий следует, что функционалы $U_0(u)$, $U_1(u)$, $U_2(u)$ записываются через собственные значения в виде

$$U_0(u) = \lambda \gamma_0(Ju), U_1(u) = \lambda \gamma_1(Ju), U_2(u) = \lambda \gamma_2(Ju).$$

Обратим внимание, что эти равенства записаны в виде $U_0(u) = (1 + l(l + 1))\gamma_0(Y_{lm})$, $U_1(u) = (1 + l(l + 1))\gamma_1(Y_{lm})$, $U_2(u) = (1 + l(l +$

1)) $\gamma_2(Y_{lm})$.

Таким образом, собственные значения и собственные функции оператора B_0

$$u_{lm}(x) = Y_{lm}(x) + (1 + l(l + 1))\gamma_0(Y_{lm})\psi_0(x) + (1 + l(l + 1))\gamma_1(Y_{lm})\psi_1(x) + (1 + l(l + 1))\gamma_2(Y_{lm})\psi_2(x), x \neq x_0 \quad (4.5)$$

при $m = -l, \dots, l, l = 0, 1, \dots$

Теорема 4.4. Пусть $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ - произвольные линейные непрерывные функционалы на $L_2(S^2)$. Оператор B_γ имеет дискретный спектр, и его спектр совпадает со спектром оператора B_0 . Соответствующая система собственных функций оператора B_γ задаётся формулами (4.5).

В заключение рассмотрим пример.

Пример 4.5. Пусть $\gamma_k(f) = \int_{S^2} \psi_k(x)f(x)dS_x, k = 0, 1, 2$. В этом случае собственные функции оператора $B_{\gamma_0, 0, 0}$ имеют вид

$$u_{lm}(x) = Y_{lm}(x) + Y_{lm}(x_0)\psi_0(x) + \left. \frac{\partial}{\partial x_1} Y_{lm}(x) \right|_{x=x_0} \psi_1(x) + \left. \frac{\partial}{\partial x_2} Y_{lm}(x) \right|_{x=x_0} \psi_2(x),$$

где $m = -l, \dots, 0, \dots, l, l = 0, 1, \dots$

В данном пункте изучались собственные функции возмущённого оператора Лапласа-Бельтрами, заданного на двумерной сфере. Приведены описания линейных функционалов для произвольной точки проколотой сферы. Показана связь между собственными значениями и собственными функциями оператора, а также дано полное описание системы собственных функций. В работе доказано свойство дискретности спектра оператора Лапласа-Бельтрами на проколотой двумерной сфере. Приведён также пример для линейных непрерывных функционалов, где первый функционал определяется через интеграл, а два других равны нулю. Пример представляет собой явное использование теоремы, доказательство которой основано на ранее полученных результатах для возмущённого оператора. Инвариантность оператора Лапласа-Бельтрами относительно изометрий влечёт совпадение спектров оператора Лапласа-Бельтрами изометричных римановых многообразий. Таким образом, спектр оператора является изометрическим инвариантом.

4.3 Основные понятия о гармоническом осцилляторе

В данном пункте рассчитывается спектр возмущённого гармонического осциллятора. Используются новые корректно решаемые краевые задачи для

соответствующего гармонического осциллятора на двумерной проколотой сфере. Подробно изучены собственные функции гармонического осциллятора и введён набор элементов из полученных функционалов.

Спектр одномерного гармонического осциллятора, который представляет неограниченный самосопряжённый оператор в функциональном пространстве $L_2(\mathbb{R})$, состоит только из нормальных собственных значений. В любом учебнике по квантовой механике можно найти явный вид собственных значений одномерного гармонического осциллятора

$$\lambda_n = 2n + 1, n = 0, 1, \dots$$

Более того, резольвента одномерного гармонического осциллятора является компактным оператором. Также известно, что система собственных функций одномерного гармонического осциллятора имеет вид

$$f_n(x) = \left(\pi^{\frac{1}{2}} 2^n n! \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), n = 0, 1, \dots$$

где $H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)}$ - полиномы Эрмита. Спектральный анализ возмущений одномерного гармонического осциллятора

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + W(x)$$

в специальном случае, когда

$$W(x) = \sum_{j=1}^N c_j \delta(x - b_j), N < \infty$$

исследовался в работах [10], [53], [54]. Здесь мы приведём результат работы [55], где изучается случай, когда $W(x) = s[\delta(x - b) + \delta(x + b)], b \neq 0, b \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{C}$. В этом случае оператор имеет дискретный спектр, состоящий из простых собственных значений. В [55] доказана асимптотическая формула для собственных значений

$$\lambda_n = (2n + 1) + s^2 \frac{k(n)}{n} + \rho(n),$$

где $k(n) = \frac{1}{2\pi} \left[(-1)^{n+1} \sin(2b\sqrt{2n}) - \frac{1}{2} \sin(4b\sqrt{2n}) \right]$, $|\rho(n)| \leq C \frac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Двумерный гармонический осциллятор также хорошо изучен. В частности, спектр оператора H_0 , где

$$H_0 = -\Delta + x^2, x^2 = x_1^2 + x_2^2, x \in \mathbb{R}^2,$$

состоит из собственных значений $\lambda_n = 2n + 2, n \geq 0$. Кратность собственного значения λ_n равна $(n + 1)$. Соответствующие собственные функции имеют вид

$$\varphi_l^{(n)}(x) = f_l(x_1) f_{n-l}(x_2), l = 0, \dots, n.$$

В работе [56] исследован спектр возмущения двумерного гармонического осциллятора

$$H = H_0 + W,$$

где W - оператор умножения на ограниченную измеримую финитную вещественную функцию. В работе [56] доказана следующая теорема о локализации спектра возмущения двумерного гармонического осциллятора.

Теорема [56]. Пусть n - достаточно большое натуральное число. Тогда собственные значения оператора H , лежащие в окрестности точки $2(n + 1)$, удовлетворяют неравенству

$$|2(n + 1) - z| \leq M^2 \|W\|_\infty \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \right),$$

где $\|W\|_\infty$ - норма в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^2)$.

Таким образом, в работе [56] изучены регулярные возмущения двумерного гармонического осциллятора. В настоящей работе исследуются спектры некоторых сингулярных возмущений двумерного гармонического осциллятора. Начало подобных исследований положено в работе [20].

4.4 Спектральный анализ гармонического осциллятора на проколотой плоскости

Пусть $\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2)\}$ - евклидово пространство. Выберем [20] фиксированный обратимый самосопряжённый гармонический осциллятор $B_0 = B_0^* = -\Delta + x_1^2 + x_2^2$, действующий в функциональном пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Область определения этого оператора обозначается как $D(B_0) = \{u \in W_2^2(\mathbb{R}^2): -\Delta u + x^2 u \in L_2(\mathbb{R}^2)\}$.

Известно [57], что собственные значения оператора B_0 вычисляются по формулам $\lambda_n = 2n + 2, n \geq 0$. Поскольку для всех λ_n выполняется условие $\lambda_n \geq 1$, то существует обратный оператор B_0^{-1} , являющийся интегральным оператором $B_0^{-1}f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varepsilon(x_1, x_2; t_1, t_2)f(t_1, t_2)dt_1 dt_2$. Ядро интегрального оператора $\varepsilon(x_1, x_2; t_1, t_2)$ определяет функцию Грина оператора B_0 .

Функция Грина $\varepsilon(x_1, x_2; t_1, t_2)$ удовлетворяет равенству $(-\Delta + x_1^2 + x_2^2)\varepsilon(x_1, x_2; t_1, t_2) = 0$ при $(x_1, x_2) \neq (t_1, t_2)$, что следует из определения обратного оператора B_0^{-1} . Заметим, что частные производные $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t_1}(x_1, x_2; t_1, t_2), \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} (-\Delta + x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_1}(x_1, x_2; t_1, t_2) &= 0, \\ (-\Delta + x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) &= 0, \end{aligned}$$

для $(x_1, x_2) \neq (t_1, t_2)$. Таким образом, функций $\varepsilon(x_1, x_2; t_1, t_2), \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_1}(x_1, x_2; t_1, t_2), \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ являются решениями однородного уравнения

$$(-\Delta + x_1^2 + x_2^2)u(x_1, x_2) = 0$$

при $(x_1, x_2) \neq (t_1, t_2)$.

Собственные функции [20] оператора B_0 задаются формулой

$$f_l(x_1)f_{n-l}(x_2) = (2^l l! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} H_l(x_1) (2^{n-l} (n-l)! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} H_{n-l}(x_2),$$

где $H_l(x)$ представляет полиномы Эрмита. Получим следующие представления

$$\begin{aligned} f_l(t) &= \alpha_l \left\{ \cos \left[t\sqrt{2l+1} - \frac{l\pi}{2} \right] \left[u_0(t) - \frac{u_2(t)}{4(2l+1)} + o\left(\frac{1}{l^2}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_l}{2\sqrt{2l+1}} \left\{ \sin \left[t\sqrt{2l+1} - \frac{l\pi}{2} \right] \left[u_1(t) - \frac{u_3(t)}{4(2l+1)} + o\left(\frac{1}{l^2}\right) \right] \right\} \right\}, \end{aligned}$$

где $u_0(t) \equiv 1, u_l(t) = \int_0^t L u_{l-1}(t) dt, L = -\frac{d^2}{dt^2} + t^2$,

$$\alpha_l = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{2l+1}} \left\{ 1 - \frac{1}{32(2l+1)^2} + o\left(\frac{1}{l^3}\right) \right\}.$$

Заметим [50], что собственные функции оператора B_0 на любом компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^2$ имеют глобальную оценку

$$|f_l(t)| \leq \frac{C_0}{\sqrt[4]{2l+1}}. \quad (4.6)$$

Система собственных функций оператора B_0 является ортогональным базисом в функциональном пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Известно [58], что функция Грина $\varepsilon(x_1, x_2; t_1, t_2)$ разлагается по собственным функциям оператора B_0 и имеет следующий вид

$$\varepsilon(x_1, x_2; t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \sum_{l=0}^n f_l(x_1) f_{n-l}(x_2) f_l(t_1) f_{n-l}(t_2). \quad (4.7)$$

Приведём теорему, доказанную в работе [20].

Теорема [20]. Пусть функция Грина $\varepsilon(x_1, x_2; t_1, t_2)$ двумерного гармонического осциллятора определена для всех $x \neq \pm t$ и является непрерывной функцией от $(x_1, x_2; t_1, t_2)$ в области определения. Тогда функция Грина $\varepsilon(x_1, x_2; t_1, t_2)$ имеет представление

$$\varepsilon(x_1, x_2; t_1, t_2) = \sqrt{\frac{2}{|x-t|\pi}} \varepsilon_-(x_1, x_2; t_1, t_2) + \sqrt{\frac{2}{|x+t|\pi}} \varepsilon_+(x_1, x_2; t_1, t_2) + k(x_1, x_2; t_1, t_2).$$

Заметим, что $\varepsilon_-(x_1, x_2; t_1, t_2), \varepsilon_+(x_1, x_2; t_1, t_2), k(x_1, x_2; t_1, t_2)$ являются непрерывными функциями двух пар переменных $(x_1, x_2; t_1, t_2)$.

4.5 Дельтаобразные возмущения гармонического осциллятора

В этом разделе формулируются новые корректно разрешимые задачи для оператора $(-\Delta + x_1^2 + x_2^2)$ на проколотой плоскости $\mathbb{R}_0^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1^0, x_2^0\}$. Здесь $x_1^0 \neq 0, x_2^0 \neq 0$ - фиксированные точки в $\mathbb{R}^2$. Через $Q_+^0(\delta), Q_-^0(\delta)$ обозначим два открытых круга радиуса δ с центрами в точках x_1^0, x_2^0 , соответственно, то есть $Q_+^0(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^2: |x - x_1^0| < \delta\}, Q_-^0(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^2: |x - x_2^0| < \delta\}$.

Пусть $h(x)$ такая функция, что существуют конечные значения функционалов $\gamma_1, \dots, \gamma_6$. Линейные функционалы $\gamma_1(h), \dots, \gamma_6(h)$ задаем по формулам

$$\begin{aligned}\gamma_1(h) &= -\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial Q_+^0(\delta)} \frac{\partial}{\partial v_t} h(t) ds_t, \\ \gamma_2(h) &= -\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial Q_-^0(\delta)} \frac{\partial}{\partial v_t} h(t) ds_t, \\ \gamma_3(h) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial Q_+^0(\delta)} \left(h(t) \frac{t_1 + x_1^0}{\delta} \right) ds_t, \\ \gamma_4(h) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial Q_+^0(\delta)} \left(h(t) \frac{t_2 - x_2^0}{\delta} \right) ds_t, \\ \gamma_5(h) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial Q_-^0(\delta)} \left(h(t) \frac{t_1 + x_1^0}{\delta} \right) ds_t, \\ \gamma_6(h) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial Q_-^0(\delta)} \left(h(t) \frac{t_2 - x_2^0}{\delta} \right) ds_t,\end{aligned}$$

где v_t - внешняя нормаль к $\partial Q_{\pm}^0(\delta)$.

В частности, в качестве $h(x)$ можно выбрать следующие функций

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \varepsilon(x_1, x_2; x_1^0, x_2^0), \\ \psi_2(x) &= \varepsilon(x_1, x_2; -x_1^0, -x_2^0), \\ \psi_3(x) &= \frac{\partial}{\partial t_1} \varepsilon(x_1, x_2; x_1^0, x_2^0), \\ \psi_4(x) &= \frac{\partial}{\partial t_2} \varepsilon(x_1, x_2; x_1^0, x_2^0), \\ \psi_5(x) &= \frac{\partial}{\partial t_1} \varepsilon(x_1, x_2; -x_1^0, -x_2^0), \\ \psi_6(x) &= \frac{\partial}{\partial t_2} \varepsilon(x_1, x_2; -x_1^0, -x_2^0).\end{aligned}$$

Лемма 4.6. Для $j, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ справедливы биортогональные соотношения

$$\gamma_j(\psi_k) = \delta_{jk}, \quad (4.8)$$

где δ_{jk} - символ Кронекера.

Используя выбранные потенциалы, введём класс функций

$$\hat{W}_2^2(\mathbb{R}_0^2) = \left\{ h(x) = B_0^{-1}f(x) + \sum_{j=1}^6 \alpha_j \psi_j(x), \right. \\ \left. \forall f \in L_2(\mathbb{R}^2), \forall \alpha_j \in \mathbb{C}, j = \overline{1,6} \right\}.$$

Поэтому важную роль играет следующее утверждение.

Лемма 4.7. Пусть h - произвольный элемент класса $\hat{W}_2^2(\mathbb{R}_0^2)$. Тогда существует гладкая функция $g(x)$, такая, что h представима в виде

$$h(x) = g(x) - \sum_{k=1}^6 \gamma_k(h) \psi_k(x), \quad (4.9)$$

где $g(x)$ - некоторая гладкая функция пространства $W_2^2(\mathbb{R}^2)$, $\gamma_j(h), j = 1, \dots, 6$ - линейные функционалы, определенные выше. Указанное представление (4.9) единственно.

Заметим, что лемма 4.6 и лемма 4.7 доказаны в [37]. Согласно лемме 4.7 введём оператор J . Оператор J отображает произвольный элемент $h \in \hat{W}_2^2(\mathbb{R}_0^2)$ в элемент $g \in W_2^2(\mathbb{R}^2)$, где элемент g из представления (4.9).

В [37] доказана следующая теорема.

Теорема 4.8. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ - произвольное множество линейных функционалов в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Тогда для любого $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ следующая задача

$$B_0 J h(x) = f(x), x \in R_0^2, \gamma_k(h) = \alpha_k(B_0 J h), k = 1, \dots, 6 \quad (4.10)$$

имеет единственное решение класса $\hat{W}_2^2(\mathbb{R}_0^2)$. Оператор, соответствующий задаче (4.10), будем обозначать как B_α .

В следующем разделе мы изучаем спектр оператора B_α .

4.6 Спектр возмущённого гармонического осциллятора

Согласно теореме 3.1 вводится оператор B_α . В данном пункте исследуется задача на собственные значения $B_0 J u = \lambda J u, \gamma_k(u) = \lambda \cdot \alpha_k(J u), k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Для вычисления собственных значений используем уравнение $B_0 J u = \lambda J u$, которое предполагает, что выполняется уравнение $B_0 g = \lambda g$. Собственные

значения оператора B_0 известны и записываются в виде $\lambda_n = 2n + 1$. Функция $\varphi_l^{(n)}(x)$ является собственной функцией $\varphi_l^{(n)}(x) = f_l(x_1)f_{n-l}(x_2), l = 0, \dots, n$.

Обозначим через $g(x) = Ju(x)$. Тогда $B_0g = \lambda g(x)$. Поскольку собственные значения оператора B_0 известны, то $\lambda_n = 2n + 2, n \geq 0$. В качестве соответствующих собственных функций выступают функции $Ju_{nl}(x) = \varphi_l^{(n)}(x), l = 0, 1, \dots, n$. Тогда при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ имеем

$$\gamma_k(u_{nl}) = \lambda_n \alpha_k \left(\varphi_l^{(n)} \right).$$

В результате собственные функции оператора B_α примут вид

$$u_{nl}(x) = \varphi_l^{(n)}(x) - \lambda_n \sum_{k=1}^6 \alpha_k \left(\varphi_l^{(n)} \right) \cdot \psi_k(x), l = 0, \dots, n; n \geq 0. \quad (4.11)$$

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 4.9. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ - произвольные линейные непрерывные функционалы из $L_2(\mathbb{R}^2)$. Тогда спектр оператора B_α совпадает со спектром оператора B_0 , то есть

$$\lambda_n(B_\alpha) = \lambda_n(B_0).$$

Система собственных функций оператора B_α задаётся по формулам (4.11).

В заключении рассмотрим пример.

Пример 4.10. В качестве $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ возьмем нулевые функционалы, а в качестве функционала $\alpha_1(f)$ выберем следующий функционал $\alpha_1(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} \psi_1(x)f(x)dx$. В этом случае собственные функции оператора $B_{\alpha_1 00000}$ примут вид

$$u_{nl}(x) = \varphi_l^{(n)}(x) + \varphi_l^{(n)}(x^0) \cdot \psi_1(x),$$

где $l = 0, 1, \dots$

В данном пункте изучены собственные функции возмущённого гармонического осциллятора. Даны описания линейных функционалов для произвольной точки. Показана связь между собственными значениями и собственными функциями оператора, возмущённого и невозмущённого операторов. В работе доказано свойство дискретности спектра гармонического осциллятора на прямой оси. Приводится также пример, где первый функционал определяется через интеграл, а пять других равны нулю. Пример представляет

собой явное использование теоремы, в доказательстве которой использовались ранее полученные результаты для возмущённого оператора.

В ходе выполнения диссертационной работы получены новые результаты, касающиеся корректной разрешимости задач для оператора Лапласа–Бельтрами на римановой сфере с разрезами и особенностями краевых условий в областях со сложной геометрией. Исследования направлены на установление условий единственности и существования решений для различных классов задач, связанных с операторами эллиптического типа на многообразиях, содержащих особые точки и линии разрыва. В статье [59] построена функция Грина для возмущённого оператора Лапласа–Бельтрами на двумерной сфере с конечным числом выколотых точек. Показано существование и определены аналитические свойства функции Грина в таких областях, что позволило сформулировать и доказать условия корректности для соответствующих задач. В публикации [60] исследованы операторы Лапласа–Бельтрами, действующие на стратифицированных множествах, образованных объединением проколотых окружностей и отрезков. Получены результаты о структуре спектра и условиях корректной постановки краевых задач в таких областях, что расширяет класс рассмотренных геометрических конфигураций. В работе [61] проведён системный анализ корректно разрешимых задач для оператора Лапласа–Бельтрами в различных геометрических условиях. Сформулированы общие критерии корректности и предложены методы построения решений, основанные на симметриях рассматриваемых областей и свойствах сферической гармоник.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной докторской диссертации изучаются дельтаобразные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами на римановом многообразии без границ. А также двумерная сфера в $\mathbb{R}^3$ рассматривается как риманово многообразие. Аналогичные построения можно провести для оператора Лапласа-Бельтрами на гладких многообразиях без границ. Другие возможности связаны с описанием корректных ограничений линейных дифференциальных операторов на гладких многообразиях с границей. Наконец, представляет интерес проблема описания корректных задач для оператора Лапласа-Бельтрами на многообразиях без границы, состоящей из компонент разных размерностей.

В данной работе изучаются собственные функции возмущённого оператора Лапласа-Бельтрами, определённого на двумерной сфере. Приводятся описания линейных функционалов для произвольной точки проколотой сферы. Показана связь между собственными значениями и собственными функциями оператора, а также дано полное описание системы собственных функций. В данной работе доказано свойство дискретности спектра оператора Лапласа-Бельтрами на проколотой двумерной сфере. Также приведён пример для линейных непрерывных функционалов, где первый функционал определяется через интеграл, а два других равны нулю. Пример представляет собой явное использование теоремы, в доказательстве которого использованы ранее полученные результаты для возмущённого оператора. Инвариантность оператора Лапласа-Бельтрами относительно изометрий влечёт совпадение спектров оператора Лапласа-Бельтрами изометрических римановых многообразий. Таким образом, спектр оператора является изометрическим инвариантом.

В данной работе исследованы собственные функции возмущённого гармонического осциллятора. Приведены описания линейных функционалов для произвольной точки. Показана связь между собственными значениями и собственными функциями оператора, возмущённого и невозмущённого операторов. В работе доказано свойство дискретности спектра гармонического осциллятора на прямой оси. Также приведён пример, в котором первый функционал определён через интеграл, а остальные пять равны нулю. Пример представляет собой явное использование теоремы, доказательство которой основано на ранее полученных результатах для возмущённого оператора.

Четвертый пункт диссертаций посвящён гармоническому осциллятору. Приведены данные о собственных значениях и собственных функциях гармонического осциллятора.

После этого были определены собственные значения гармонического осциллятора. Найдены собственные функции, соответствующие каждому собственному значению. Набор собственных значений представляет спектр гармонического осциллятора. После определения спектра были рассмотрены некоторые отклонения. Была показана локализация спектра этих отклонений. В

итоге была сформулирована теорема о локализации некоторых колебаний гармонического осциллятора.

Также изучаются дельтаобразные возмущения оператора Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере. Трёхмерная сфера в $\mathbb{R}^4$ рассматривается в качестве риманового многообразия. При постановке корректных задач используется ранее известное фундаментальное решение оператора Лапласа-Бельтрами. Сформулирована корректная задача для оператора Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере в четырехмерном евклидовом пространстве с разрезом, представляющим собой окружность. Приводится пример, иллюстрирующий структуру корректной задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере, из которой удалена окружность. В дальнейшем необходимо исследовать спектральные свойства операторов, соответствующих сформулированным корректно решаемым задачам для оператора Лапласа-Бельтрами на сфере с разрезом вдоль многообразия малых размерностей. В этом направлении имеются отдельные работы.

В данной диссертации изучены дифференциальные операторы вдоль римановых многообразий с помощью оператора Лапласа-Бельтрами. Кроме того, рассмотрены примеры с использованием римановой метрики в евклидовом пространстве и с использованием операций, выполняемых в евклидовом пространстве.

В основной части рассмотрены дифференциальные операторы вдоль римановых многообразий. Изучено вычисление основной формулы оператора Лапласа-Бельтрами на римановых многообразиях и рассмотрены его отдельные случаи на сфере.

Оценка полноты достижения цели работы. Все полученные результаты являются новыми. Подтверждением полноты достижения цели диссертации является публикация результатов исследования в зарубежных рецензируемых научных журналах, индексируемых в ведущих международных системах цитирования (библиографических базах данных) как Web of Science Clarivate Analytics и Scopus.

Предложения по применению полученных результатов. Результаты, полученные при изучении корректно решаемых задач для оператора Лапласа-Бельтрами на римановой сфере с разрезами, имеют значение и приложения в различных областях науки и техники. Оператор Лапласа-Бельтрами часто используется для моделирования переноса тепла и массы на поверхностях. Применения могут быть найдены в материаловедении, где представляет интерес поведение веществ на поверхностях с разрезами. Это имеет значение для проектирования и анализа материалов с особыми геометрическими характеристиками. Интересной темой является изучение квантовой физики на искривлённых поверхностях. Корректно разрешимые задачи, выявленные в диссертации, могут способствовать пониманию квантовых явлений на поверхностях с топологическими дефектами, вызванными разрезами. Задачи

оптимизации на поверхностях с ограничениями широко распространены в различных областях. Результаты могут быть применены для решения задач оптимизации, связанных с минимизацией энергии или других целевых функций, подверженных ограничениям, налагаемым геометрией поверхности. Результаты могут быть интегрированы в методы топологического анализа данных, способствуя глубокому пониманию базовых геометрических и топологических структур данных, определённых на поверхностях с разрезами. Применяя полученные результаты в этих областях, исследователи и практиканты могут углубить понимание геометрической и топологической сложности и разработать более эффективные методы решения задач, связанных с оператором Лапласа-Бельтрами на поверхностях с разрезами.

Оценка научного уровня работы в сравнении с достижениями в научном направлении. Работа посвящена конкретной и сложной геометрической конфигурации: римановой сфере с разрезами. Эта специфика указывает на определённый уровень новизны, поскольку изучение оператора Лапласа-Бельтрами на поверхностях с разрезами не является широко исследованной темой. Включение разрезов вносит нетривиальные топологические особенности, делая работу уникальной в более широком контексте исследований операторов Лапласа-Бельтрами.

В диссертации признаётся важность теоретических основ дифференциальной и римановой геометрии, а также уравнений в частных производных. Включение всестороннего обзора этих основ свидетельствует о приверженности строгому и обоснованному подходу.

Признание проблем, связанных с особенностями, возникающими при разрезах, демонстрирует понимание трудностей изучения дифференциальных уравнений на поверхностях с нетривиальной топологией. Решение этих проблем повышает ценность работы и позиционирует её как вклад в решение задач в сложной геометрической постановке.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Соболев С.Л. Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений // Математический сборник. – 1937. – Т. 2 (44), № 3. – С. 465–499.
- 2 Слободецкий Л.Н. Обобщённые пространства Соболева и их применение к краевым задачам для уравнений в частных производных // Учёные записки Ленинградского государственного педагогического института им. А. И. Герцена. – 1958. – Т. 197. – С. 54–112.
- 3 Стернин Б.Ю. Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с краем, состоящим из компонент разной размерности // Труды Московского математического общества. – 1966. – Вып. 15. – С. 346–382.
- 4 Кангузин Б.Е., Аниязов А.А. Корректные задачи для оператора Лапласа в проколоте круге // Математические заметки. – 2011. – Т. 89, № 5. – С. 819–829.
- 5 Кангузин Б.Е., Токмагамбетов Н.Е. Разрешения корректных задач для конечномерных возмущений полигармонического оператора в проколоте области // Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 265–273.
- 6 Абдурахитова Г.Е., Кангузин Б.Е. Корректное определение эллиптических операторов второго порядка с точечным взаимодействием и их резольвент // Сибирские успехи математики. – 2020. – Т. 30, № 3. – С. 153–161.
- 7 Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 741–753.
- 8 Павлов Б.С., Фаддеев М.Д. О рассеянии полным резонатором с малым отверстием // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1983. – Вып. 126. – С. 159–169.
- 9 Демков Ю.Н., Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. – Л.: ЛГУ, 1975. – 208 с.
- 10 Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. Solvable Models in Quantum Mechanics. – Providence: AMS Chelsea Publishing, 2005. – 488 p.
- 11 Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодические дифференциальные операторы второго порядка: пороговые свойства и усреднение // Петербургский математический журнал. – 2004. – Т. 15, № 5. – С. 639–714.
- 12 Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
- 13 Kanguzhin B.E., Tulenov K.S. Correctness of the definition of the Laplace operator with delta-like potentials. — Complex Variables and Elliptic Equations, 2022, Vol. 67, No. 4, pp. 898–920.
- 14 Kanguzhin B.E., Tulenov K.S. Singular perturbations of Laplace operator and their resolvents. — Complex Variables and Elliptic Equations, 2020, Vol. 65, No. 9, pp. 1433–1444.

15 Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды Московского математического общества. – 1952. – Т. 1. – С. 187–246.

16 Павлов Б.С. Теория расширений и разрешимые модели // Успехи математических наук. – 1987. – Т. 42, № 6. – С. 127–168.

17 Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К теории сужения и расширения операторов. I // Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. – 1982. – № 5. – С. 24–30.

18 Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 271, № 6. – С. 1307–1310.

19 Kanguzhin B.E., Akanbay Y., Kaiyrbek Zh. On the uniqueness of the recovery of the domain of the perturbed Laplace operator // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, No. 6. – P. 1532–1535.

20 Kanguzhin B.E., Fazullin Z.Yu. On the localization of the spectrum of some perturbations of a two-dimensional harmonic oscillator // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2021. – Vol. 66, No. 6–7. – P. 1194–1208.

21 Kanguzhin B.E. Changes in the finite part of the spectrum of the Laplace operator under delta-like perturbations // Differential Equations. – 2019. – Vol. 55, No. 10. – P. 1328–1335.

22 Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Коньркулжаева М.Н. Самосопряжённые ограничения максимального оператора на графе // Уфимский математический журнал. – 2017. – Т. 9, № 4. – С. 35–43.

23 Kanguzhin B.E., Nurakhmetov D.B., Tokmagambetov N.E. On Green Function's Properties // International Journal of Mathematical Analysis. – 2013. – Vol. 7, No. 13–16. – P. 747–753.

24 Hobson E.W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1931. – 500 p.

25 Feng D., Yuan S. Approximation Theory and Harmonic Analysis on Spheres and Balls. – New York: Springer, 2013. – 367 p.

26 Abramowitz M., Stegun I.A. (eds.). Legendre Functions and Orthogonal Polynomials // Handbook of Mathematical Functions. – New York: Dover, 1972. – P. 331–339, 771–802.

27 Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. – 7th ed. – New York: Academic Press, 2007. – 1171 p.

28 Kanguzhin B.E., Tokmagambetov N.E. Green's function of the Dirichlet problem for the Laplace operator and inhomogeneous boundary value problems for the Poisson equation in a punctured domain // Modern Trends in Analysis and Its Applications / eds. V. Mityushev, M. Ruzhansky. – Series: Trends in Mathematics. – Cham: Birkhäuser, 2016. – P. 215–227.

29 Kanguzhin B.E., Nurakhmetov D.B., Tokmagambetov N.E. The Laplace operator with delta-like potentials // Russian Mathematics (Izvestiya Matematika). – 2014. – Vol. 58, No. 2. – P. 6–12.

- 30 Dai F., Xu Y. Approximation Theory and Harmonic Analysis on Spheres and Balls. – New York: Springer, 2013. – 508 p. – (Series: Springer Monographs in Mathematics).
- 31 Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Part II: Partial Differential Equations. – Hoboken: Wiley, 2008. – 830 p.
- 32 Kanguzhin B.E., Dosmagulova K.A. Well-posed problems for the Laplace–Beltrami operator on a punctured two-dimensional sphere // Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Applications. – 2023. – Vol. 7, No. 2. – P. 428–440.
- 33 Ruzhansky M., Suragan D. Layer potentials, Green’s formula, the Kac problem, and refined Hardy inequality on homogeneous Carnot groups // Advances in Mathematics. – 2017. – Vol. 308. – P. 483–528.
- 34 Lee J.M. Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1997. – 380 p.
- 35 Зорич В.А. Математический анализ. Т. 2. – М.: МЦНМО, 2004. – 656 с.
- 36 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. О проникаемых граничных условиях потенциала для оператора Лапласа–Бельтрами // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1060–1064.
- 37 Dosmagulova K., Kanguzhin B. Uniquely solvable problems for the Laplace–Beltrami operator on a sphere punctured by a curve // Results in Nonlinear Analysis. – 2023. – Vol. 6, No. 3. – P. 43–49.
- 38 Crowdy D. Point vortex motion on the surface of a sphere with impenetrable boundaries // Physics of Fluids. – 2006. – Vol. 18, No. 3. – P. 036602.
- 39 Попов Д.А. Спектр оператора Лапласа на замкнутых поверхностях // Успехи математических наук. – 2022. – Т. 77, № 1. – С. 81–97.
- 40 Розенблум Г.В., Соломяк М.З., Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». – М.: ВИНТИ, 1989. – Т. 64. – С. 5–242.
- 41 Hemmrich S., Nigam N., Steinbach O. Boundary integral equations for the Laplace–Beltrami operator // Mathematics and Computation. – Heidelberg: Springer, 2008. – P. 65–88.
- 42 Kanguzhin B.E. Propagation of non-smooth waves under singular perturbations of the wave equation // Eurasian Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 13, No. 3. – P. 41–50.
- 43 Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – М.: Наука, 2001. – 295 с.
- 44 Firey W.J. Determination of convex bodies from mean radius of curvature functions // Mathematika. – 1967. – Vol. 14. – P. 1–13.
- 45 Dosmagulova K.A., Kanguzhin B.E., Fazullin Z.Y. Spectrum of the perturbed harmonic oscillator // Applied Mathematics and Information Sciences. – 2023. – Vol. 17, No. 4. – P. 553–557.

- 46 Кангужин Б.Е., Токмагамбетов Н.Е. О регуляризованных формулах следа для корректных возмущений m -оператора Лапласа // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 12. – С. 1583–1588.
- 47 Кангужин Б.Е. Критерии Вайнштейна и регуляризованные следы в случае поперечных колебаний упругой струны с пружинами // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 7–12.
- 48 Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. – М.: ИЛ, 1953. – 501 с.
- 49 Келдыш М.В. Собственные значения и собственные функции для некоторых классов несимметричных уравнений // Доклады АН СССР. – 1951. – Т. 77, № 1. – С. 11–14.
- 50 Хромов А.П. Конечномерные возмущения операторов Вольтерра. – М.: Центр математических исследований, 2004. – 150 с.
- 51 Кангужин Б.Е., Нурахметов Д.Б., Токмагамбетов Н.Е. Оператор Лапласа с дельта-образными потенциалами // Математика. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 6–12.
- 52 Михайлов В.П. Уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
- 53 Albeverio S., Fei S.-M., Kurasov P. Point interactions: PT-Hermiticity and reality of the spectrum // Letters in Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 59, No. 3. – P. 227–242.
- 54 Cartarius H., Dast D., Haag D., Wunner G., Eichler R., Main J. Stationary and dynamical solutions of the Gross–Pitaevskii equation for a Bose–Einstein condensate in a PT-symmetric double well // Acta Polytechnica. – 2013. – Vol. 53, No. 3. – P. 259–267.
- 55 Mityagin B. Spectrum of a harmonic oscillator operator perturbed by point interactions // International Journal of Theoretical Physics. – 2015. – Vol. 54. – P. 4068–4085.
- 56 Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х. Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора // Математический сборник. – 2001. – Т. 192, № 5. – С. 725–761.
- 57 Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. – М.: Иностранная литература, 1960. – 381 с.
- 58 Ильин В.А. Представление функции источника для прямоугольника в виде билинейного ряда характеристических функций // Доклады АН СССР. – 1950. – Т. 74, № 4. – С. 567–570.
- 59 Dosmagulova K.A., Kanguzhin B.E. Green’s function of the perturbed Laplace–Beltrami operator with a finite number of punctures on the two-dimensional sphere // In: Women in Analysis and Partial Differential Equations. Series: Trends in Mathematics. – Vol. 5. – Cham: Birkhäuser, 2024. – P. 145–151.
- 60 Kanguzhin B.E., Dosmagulova K.A., Akanbay Y.E. On the Laplace–Beltrami operator in stratified sets composed of punctured circles and segments // Journal of

Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2025. – Vol. 125, No. 1. – P. 33–42.

61 Dosmagulova K.A., Kanguzhin B.E. Well-posed problems for the Laplace–Beltrami operator // Symmetry. – 2025. – Vol. 17, No. 9. – P. 1–12.